Jannis Andrija Schnitzer, Mo16. Tutor: Jennifer Schober

ANALYTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK
Prof. Arthur HEBECKER
S. Kraus & C. Mayrhofer

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2012

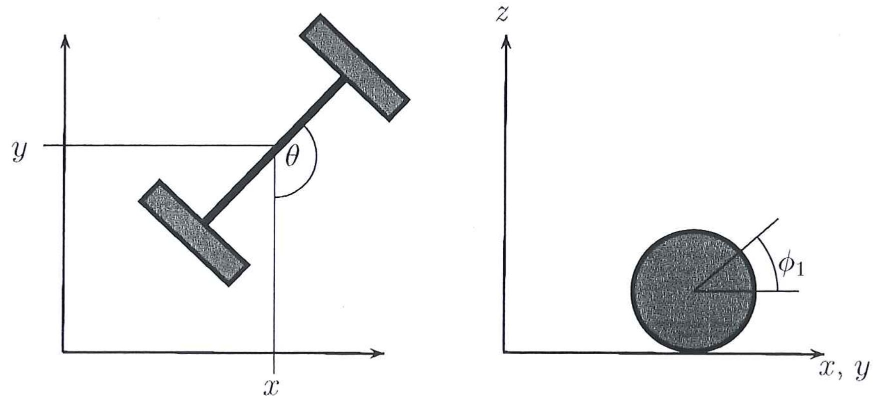
8. ÜBUNGSBLATT

1	2	3	4	Σ
10	10	10	10	40

Die schriftlichen Aufgaben sind am 11.06.2012 in den Tutorien abzugeben.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte):
Zwei Räder mit Radius r seien im Abstand von $2R$ auf einer Achse montiert. Die Räder seien unabhängig voneinander drehbar. Diese Anordnung rolle rutschfrei und ohne Rollreibung oder Luftwiderstand auf einer horizontalen Ebene. Beschreiben Sie die Bewegung mit den verallgemeinerten Koordinaten x, y, θ und ϕ, wobei x und y die Schwerpunktskoordinaten seien, ϕ die symmetrische Kombination der Radwinkel ϕ_1 und ϕ_2 ist, $\phi = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$, und θ proportional zur antisymmetrischen Kombination sei, $\theta = \frac{1}{2}\frac{r}{R}(\phi_1 - \phi_2)$. Formulieren Sie die zwei zugehörigen (nichtholonomen) differentiellen Zwangsbedingungen. Berechnen Sie die allgemeinste Bewegung des Systems durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art und beschreiben Sie alle möglichen "Radspuren". (Die Anführungsstriche beziehen sich auf die Tatsache, dass in Abwesenheit von Dissipationseffekten natürlich auch keine Radspuren auftreten.) J_θ und J_ϕ seien vorgegeben.

Hinweis: Verwenden Sie für das Lösen der Differentialgleichungen, dass eine der sechs Diffentialgleichungen die Drehimpulserhaltung in z-Richtung ergibt, $\dot{L}_z = J_\theta \ddot{\theta} = 0$, woraus $\theta = \Omega t$ folgt. Durch Einsetzen des Ausdrucks für θ und der restlichen Differentialgleichungen ineinander lässt sich das gesamte Differentialgleichungssystem lösen.



Aufgabe 8.2 (10 Punkte):

a) Führen Sie sich noch einmal die Vorlesungsnotizen zum Hamilton-Formalismus zu Gemüte. Leiten Sie anschließend die Hamilton-Funktion H für den Fall mehrer Variablen aus der Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ her und zeigen Sie, dass H von der Form $T+V$ ist wenn $T(\dot{q}_i)$ homogen vom Grad zwei in den $\dot{q}_i$ ist. Überprüfen Sie nun, dass für den mehrdimensionalen Fall die folgenden Bewegungsgleichungen gelten:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,. \tag{1}$$

b) Führen Sie für folgende Funktionen die Legendre-Transformation durch:

$$f_1(x) = \cosh(x)\,, \qquad f_2(x_i) = \sum_i x_i^4\,, \qquad f_3(x_i) = e^{\sqrt{\sum_i x_i^2}} \quad \text{und} \quad f_4(x_i) = A_{lm} x_l x_m\,, \tag{2}$$

wobei A_{lm} symmetrisch und positiv definit ist.

Aufgabe 8.3 (10 Punkte):
Stellen Sie die Lagrange-Funktionen für das eindimensionale Pendel[1] mit Masse M und Pendellänge l und den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Federkonstante k auf. Führen Sie für beide Systeme die Legendre-Transformation durch um die Hamilton-Funktionen zu erhalten. Berechnen Sie nun aus diesen die Hamilton-Gleichungen und vergleichen Sie diese mit den Euler-Lagrange-Gleichungen. Betrachten Sie anschließend den Phasenraum für beide Systeme. Skizzieren Sie verschiedene Phasenraumtrajektorien zu unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Was für Bahnen beschreiben die Phasenraumtrajektorien des harmonischen Oszillators? Was sind die wesentlichen Unterschiede zwischen beiden System und für welchen Phasenraumbereich werden beide annähernd identisch?

Zeigen Sie explizit, dass für den harmonischen Oszillator

$$J = (p, m\,\omega\,q) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

der Erhaltungsgröße von Aufgabe 4.1 c) von Blatt 4 entspricht, indem Sie q mit der passenden Koordinate von 4.1 identifizieren.

Freiwilliger Zusätze:

a) Was lässt sich mit J nun über den zeitlichen Verlauf der Phasenraumtrajektorie eines harmonischen Oszillators aussagen?

b) Betrachten Sie den Phasenraum von Aufgabe 6.5 von Blatt 6.

Aufgabe 8.4 (10 Punkte):
Zeigen Sie durch Verwendung der Poissonklammer $\{v, w\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial w}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial q_i}$, dass für den Drehimpuls $L_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k$ die folgende (Lie-Algebra) Relation gilt:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k\,. \tag{4}$$

Freiwilliger Zusatz: Zeigen Sie, dass $D_v := \{v, .\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}$ eine Derivation auf der Algebra $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ darstellt, das heißt

$$D_v(u\,w) = (D_v u)w + u\,D_v w \tag{5}$$

gilt. Benutzen Sie nun (5), $\{p_i, p_j\} = \{q_k, q_l\} = 0$ und $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ um zu beweisen, dass $L_{nm} := q_n p_m - q_m p_n =: q_{[n} p_{m]}$

$$\{L_{ij}, L_{kl}\} = \delta_{i[l} L_{k]j} - \delta_{j[l} L_{k]i} \tag{6}$$

erfüllt. Für $n = 3$ lässt sich mit Hilfe des ϵ-Tensors, der $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Vektorraum der antisymmetrischen $n \times n$-Matrizen auf den n-dimensionalen Vektorraum abbilden. Zeigen Sie, dass für diesen Fall (6) in (4) übergeht, wobei $L_i := \frac{1}{2}\epsilon_{inm} L_{nm}$.

Nebenbemerkung: Die Jakobi-Identität ist die Bedingung, dass D_v auch auf der Lie-Algebra die Derivationseigenschaft erfüllt, $D_v\{u, w\} = \{D_v u, w\} + \{u, D_v w\}$.

Hinweis: Die folgende ϵ-Tensoridentität ist für die *gesamte* Aufgabe von großer Nützlichkeit:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{i[l}\delta_{m]j}\,, \tag{7}$$

z.B. auch um zwischen L_{ij} und L_k zu wechseln.

---

[1] Der Winkel des Pendels sei als uneingeschränkt anzunehmen, das heißt Überschläge sind möglich.

8.1.

Wir stellen fest:

Wenn (x_1, y_1) die SP-Koordinaten des 1. Rades sind, und (x_2, y_2) die des 2. Rades, dann muss gelten:

$$dx_1 = r\,d\varphi_1 \cos\Theta \qquad dx_2 = r\,d\varphi_2 \cos\Theta$$ ✓
$$dy_1 = r\,d\varphi_1 \sin\Theta \qquad dy_2 = r\,d\varphi_2 \sin\Theta$$

(Analog zur Vorlesung)

Da gilt, dass $x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ ✓
und $y = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$, muss auch gelten:

$$(Z1) \quad dx = \frac{1}{2}(dx_1 - dx_2) = \frac{1}{2}(d\varphi_1 - d\varphi_2)\, r\cos\Theta = d\varphi\, r\cos\Theta$$ ✓
$$(Z2) \quad dy = \frac{1}{2}(dy_1 - dy_2) = \frac{1}{2}(d\varphi_1 - d\varphi_2)\, r\sin\Theta = d\varphi\, r\sin\Theta$$ ✓

$\Rightarrow f^1_x = -1,\ f^1_\varphi = r\cos\Theta \quad ; \ f^1_q = 0$ für alle restlichen q ✓

$\quad f^2_y = -1,\ f^2_\varphi = r\sin\Theta \quad ; \ f^2_q = 0$ " " " " ✓

Mit $Q_{äuß} = 0$ ✓ und $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J_\Theta \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}J_\varphi \dot{\varphi}^2$ ✓

gelten dann die selben Lag.-Gl. 1. Art,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_m} = 0 \ \forall q_m \in \{x, y, \varphi, \Theta\}\right)$$

$$(I) \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \sum_\alpha \lambda^\alpha f_x^\alpha = 0$$

$$(II) \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \sum_\alpha \lambda^\alpha f_y^\alpha = 0$$ ✓

$$(III) \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right) - \sum_\alpha \lambda^\alpha f_\Theta^\alpha = 0$$

$$(IV) \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \sum_\alpha \lambda^\alpha f_\varphi^\alpha = 0$$

$$(V) \quad \dot{x}f^1_x + \dot{y}f^1_y + \dot{\Theta}f^1_\Theta + \dot{\varphi}f^1_\varphi = 0$$

$$(VI) \quad \dot{x}f^2_x + \dot{y}f^2_y + \dot{\Theta}f^2_\Theta + \dot{\varphi}f^2_\varphi = 0$$

Eingesetzt ergibt sich

$$(\mathrm{I}) \quad m\ddot{x} = \lambda^1$$

$$(\mathrm{II}) \quad m\ddot{y} = \lambda^2$$

$$(\mathrm{III}) \quad J_\theta \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\theta = \Omega t}}$$ ($\theta_0 = 0$ dreht Koordinatensystem auf anfängl. Stand der Achse.)

$$(\mathrm{IV}) \quad J_\varphi \ddot{\varphi} + \lambda^1 r \cos\theta + \lambda^2 r \sin\theta = 0$$

$$(\mathrm{V}) \quad \dot{x} = \dot{\varphi} r \cos\theta$$

$$(\mathrm{VI}) \quad \dot{y} = \dot{\varphi} r \sin\theta$$

Setze $\theta = \Omega t$ in (V) und (VI) ein $\Rightarrow$

$$\dot{x} = \dot{\varphi} r \cos\Omega t$$
$$\dot{y} = \dot{\varphi} r \sin\Omega t$$

$$\overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{x} = r\ddot{\varphi}\cos\Omega t - r\Omega\dot{\varphi}\sin\Omega t$$
$$\ddot{y} = r\ddot{\varphi}\sin\Omega t + r\Omega\dot{\varphi}\cos\Omega t$$

mit (I) u. (II)

$$\Rightarrow \quad \lambda^1 = mr\ddot{\varphi}\cos\Omega t - mr\Omega\dot{\varphi}\sin\Omega t$$
$$\lambda^2 = mr\ddot{\varphi}\sin\Omega t + mr\Omega\dot{\varphi}\cos\Omega t$$

Eins. in (IV)

$$\Rightarrow \quad \mathrm{IV} \quad J_\varphi \ddot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}\cos^2\Omega t - mr^2\Omega\dot{\varphi}\sin\Omega t\cos\Omega t + \underbrace{mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\Omega t}_{=mr^2\ddot{\varphi}} + \underbrace{mr^2\Omega\dot{\varphi}\sin\Omega t\cos\Omega t}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad J_\varphi \ddot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0$$

10/10

$\Rightarrow$ entweder ist $J_\varphi + mr^2 = 0$ (bei Massenpkt. als Rädern $\Rightarrow \varphi$ bel.)

oder es gilt $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \underline{\varphi(t) = \omega t + \varphi_0}$

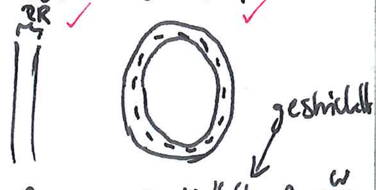
$$\Rightarrow \lambda^1 = -mr\Omega\omega\sin\Omega t, \quad \lambda^2 = +mr\Omega\omega\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -r\Omega\omega\sin\Omega t; \quad \ddot{y} = +r\Omega\omega\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \dot{x} = r\omega\cos\Omega t + v_x; \quad \dot{y} = r\omega\sin\Omega t + v_y$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = r\frac{\omega}{\Omega}\sin(\Omega t) + v_x t + x_0}}; \quad \underline{\underline{y = -r\frac{\omega}{\Omega}\cos(\Omega t) + v_y t + y_0}}$$

$\Rightarrow$ Radspuren entweder parallel oder 2 konzentrische Kreise!



Radius d. Mittelkr. $R = r\frac{\omega}{\Omega}$

8.2 (a)

$$\mathcal{H}(\bar{q},\bar{p},t) = \dot{\bar{q}}\cdot\bar{p} - \mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$$

mit $\bar{p} = \nabla_{\dot{q}}\mathcal{L} \Leftrightarrow p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(\bar{q},\bar{p},t) = \dot{\bar{q}}\,\nabla\mathcal{L} - \mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$$

Mit $\mathcal{L} = T - V$, $T = T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$, $V = V(\bar{q},t)$ und T hom. vom Grad 2 in den $\dot{\bar{q}}$ folgt:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} \quad\text{und}\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = 2T - (T - V) = T + V.$$

Überprüfe BGL:

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\underbrace{\left(\dot{\bar{q}}\bar{p} - \mathcal{L}\right)}_{=\mathcal{H}} \overset{\text{Produktregel}}{=} \dot{q}_i + p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\mathcal{L}(\bar{q},\dot{q}(\bar{p}),t)$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \dot{q}_i + p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)}{\partial\dot{q}_i}}_{=p_i}$$

$$= \dot{q}_i + p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\underbrace{\left(\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}}(\bar{q},\bar{p},t) - \mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}}(\bar{q},\bar{p},t),t)\right)}_{=\mathcal{H}}$$

$$= \underbrace{\dot{\bar{q}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial q_i}}_{=0,\ \text{da partiell}} + \bar{p}\frac{\partial\dot{\bar{q}}}{\partial q_i} - \text{"}\frac{d}{dq_i}\text{"}\mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}}(\bar{q},\bar{p},t),t)$$

da hier auch die Beziehung zwischen $\dot{\bar{q}}$ und $\bar{q}$ von Relevanz ist, weil $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{q},\bar{p},t)$ und somit das Argument $\bar{q}$ von $\dot{\bar{q}}(\bar{q},\bar{p},t)$ quasi direkt $\mathcal{L}$ beeinflusst.

6/16

$$= \bar{p}\frac{\partial\dot{\bar{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} = \bar{p}\frac{\partial\dot{\bar{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial\dot{\bar{q}}}{\partial q_i}\overbrace{\nabla\mathcal{L}}^{=\bar{p}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \overset{\text{ELG}}{=} \frac{d}{dt}\overbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}}^{=p_i} = \dot{p}_i \quad \square$$

(b) $g_1(u) = x\cdot u - f_1(x)$

$$u = f_1'(x) = \sinh(x) \Rightarrow x = \operatorname{arsinh}(u)$$

$$\Rightarrow g_1(u) = u\cdot\operatorname{arsinh}(u) - \cosh(\operatorname{arsinh}(u)) = \underline{\underline{u\cdot\operatorname{arsinh}(u) - \sqrt{u^2+1}}}$$ ✓

$$g_2(\bar u) = \bar x\cdot\bar u - f_2(\bar x)$$

$$\bar u = \bar\nabla f_2(\bar x)$$

$$\Leftrightarrow u_i = \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 4x_i^3 \Rightarrow x_i = \sqrt[3]{\frac{u_i}{4}}$$

$$\Rightarrow g_2(\bar u) = \sum_i u_i\sqrt[3]{\frac{u_i}{4}} - \sum_i\left(\sqrt[3]{\frac{u_i}{4}}\right)^4$$

$$= \sum_i\left(\sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4}} - \sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4^4}}\right)$$

$$= \sum_i\left(\frac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[3]{4^3}}\sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4}} - \sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4^4}}\right) = \sum_i\left(4\sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4^4}} - \sqrt[3]{\frac{u_i^4}{4^4}}\right)$$

$$= \underline{\underline{\sum_i 3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{u_i}{4}}\right)^4}}$$ ✓

$$f_3(\bar x) = e^{\sqrt{\sum_j x_j^2}} = e^{\|x\|_2}$$

$$g_3(\bar u) = \bar x\cdot\bar u - f_3(\bar x)$$

$$\bar u = \bar\nabla f \Leftrightarrow u_i = \frac{\partial f_3}{\partial x_i} = e^{\sqrt{\sum_j x_j^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\sum_j x_j^2}}\cdot\cancel{2}x_i$$

$$= x_i\cdot\frac{e^{\|x\|_2}}{\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \bar u = \bar x\cdot\frac{e^{\|x\|_2}}{\|x\|_2} \Rightarrow \bar u = \hat x\cdot e^{\|x\|_2} \qquad \left(\hat x \equiv \frac{\bar x}{\|x\|_2} \text{ ist Einheitsvektor}\right)$$

$$\Rightarrow \|\bar u\|_2 = e^{\|x\|_2} \quad \text{und} \quad \frac{\vec u}{\|\bar u\|_2} = \hat x$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 = \ln\|u\|_2 \Rightarrow \bar x = \hat x\cdot\ln\|u\|_2 = \frac{\bar u}{\|u\|_2}\ln\|u\|_2$$

$$\Rightarrow g_3(\bar u) = \bar u\cdot\bar u\cdot\frac{\ln\|u\|_2}{\|u\|_2} - e^{\left\|\bar u\cdot\frac{\ln\|u\|_2}{\|u\|_2}\right\|_2} = \|u\|_2\ln\|u\|_2 - e^{\ln\|u\|_2}$$

$$= \underline{\underline{\|u\|_2\cdot(\ln\|u\|_2 - 1)}}$$

$$= \sqrt{\sum_j u_j^2}\cdot\left(\ln\sqrt{\sum_j u_j^2} - 1\right)$$ ✓

$f_4(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$

$$= A_{11} x_1 x_1 + A_{12} x_1 x_2 + \cdots + A_{1n} x_1 x_n +$$
$$A_{21} x_2 x_1 + A_{22} x_2 x_2 + \cdots + A_{2n} x_2 x_n +$$
$$\vdots$$
$$A_{n1} x_n x_1 + A_{n2} x_n x_2 + \cdots + A_{nn} x_n x_n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_4}{\partial x_i} = \sum_j 2 \cdot A_{ij} \cdot x_j \quad (\text{wegen } A_{ij} = A_{ji})$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} f_4 = 2(A\bar{x}) = \bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2} A^{-1} \bar{u}$$

$$\Rightarrow g_4(\bar{u}) = \frac{1}{2} \bar{u}^T A^{-1} \bar{u} - \left(\frac{1}{2} A^{-1} \bar{u}\right)^T \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} A^{-1} \cdot \bar{u}\right)$$

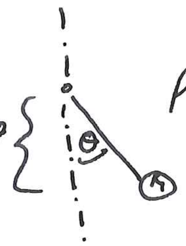
$$= \frac{1}{2} \bar{u}^T A^{-1} \bar{u} - \left(\frac{1}{2} A^{-1} \bar{u}\right)^T \cdot \left(\frac{1}{2} \bar{u}\right)$$

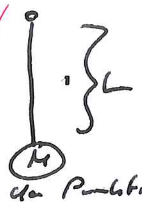
$$= \frac{1}{2} \bar{u}^T A^{-1} \bar{u} - \frac{1}{4} \bar{u}^T A^{-1} \bar{u} = \frac{1}{4} \bar{u}^T A^{-1} \bar{u} = \frac{1}{4} A^{-1}_{lm} u_l u_m$$ ✓

4/4

8.3 Pendel ✓

$-h = L\cos\theta$





$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \; ; \; I = \underbrace{I_{CM}}_{=0,\ \text{da Punktmasse}} + ML^2 = ML^2$$

$$V = Mgh \; ; \; h = -L\cos\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} ML^2 \dot{\theta}^2 + MgL\cos\theta$$ ✓

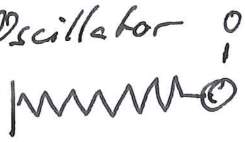
Legendre-Trf.: $q \equiv \theta$, $\dot{q} \equiv \dot{\theta}$, $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p}{ML^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \dot{q} \cdot p - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$ ✓

$$= \frac{p^2}{ML} - \frac{1}{2} ML^2 \frac{p^2}{(ML^2)^2} - MgL\cos q$$

Oscillator

z.B. , Auslenkung sei Koord. „x" ✓

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} kx^2 \; (\text{Hook})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$ ✓

Legendre-Trf.:

$q \equiv x$, $\dot{q} = \dot{x}$, $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$

$$\mathcal{H} = \dot{q}p - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} kx^2$$ ✓

Pendel | Oscillator

$\Rightarrow$ Ham.-Gl.: $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{ML^2}$ ✓

$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -MgL\sin q$ ✓

$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{ML^2} \Rightarrow ML^2\ddot{q} = -MgL\sin q$ ✓

Ham.-Gl.:

$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}$ ✓

$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -kq$ ✓

$\Rightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \Rightarrow m\ddot{q} = -kq$ ✓

ELG:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$\Leftrightarrow ML\ddot{\theta} + MgL\sin\theta = 0$ ✓

ELG:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$ ✓

Wir stellen fest: aus den Hamiltongleichungen lassen sich in beiden Fällen durch Ableiten & Einsetzen die Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten. ✓

Phasenraumzeichnungen: Siehe Extrablatt.

Wir stellen fest, dass für kleine Anfangs-Winkelgeschwindigkeiten (und natürlich aufgrund der Natur des kreisenden Pendels nur im Winkelbereich $(-\pi, \pi)$) sich das Pendel wie der harmonische Oscillator verhält. ✓

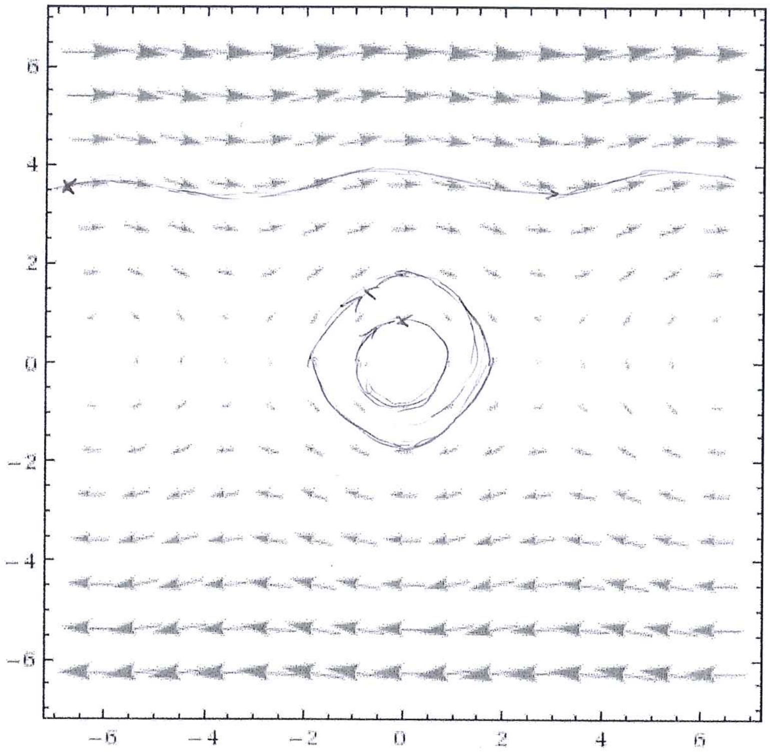
Bei sehr grossen Anfangsgeschwindigkeiten jedoch rotiert es kontinuierlich; ~~Bei sehr grossen Anfangswin~~
In den Anfangswinkeln verhält sich das System 2π-periodisch (s.o.). ✓

Wir stellen zudem fest, dass $J = (p, m\omega q)\begin{pmatrix}\cos\omega t \\ \sin\omega t\end{pmatrix}$

$= p\cos\omega t + m\omega q\sin\omega t$

durch $q \equiv z$; $p = m\dot{q} \equiv m\dot{z}$ ✓
in die erhaltene Grösse $\tilde{J} = m\dot{z}\cos(\omega t) + m\omega z\sin(\omega t)$ aus 6.1 übergeht.

10 / 10

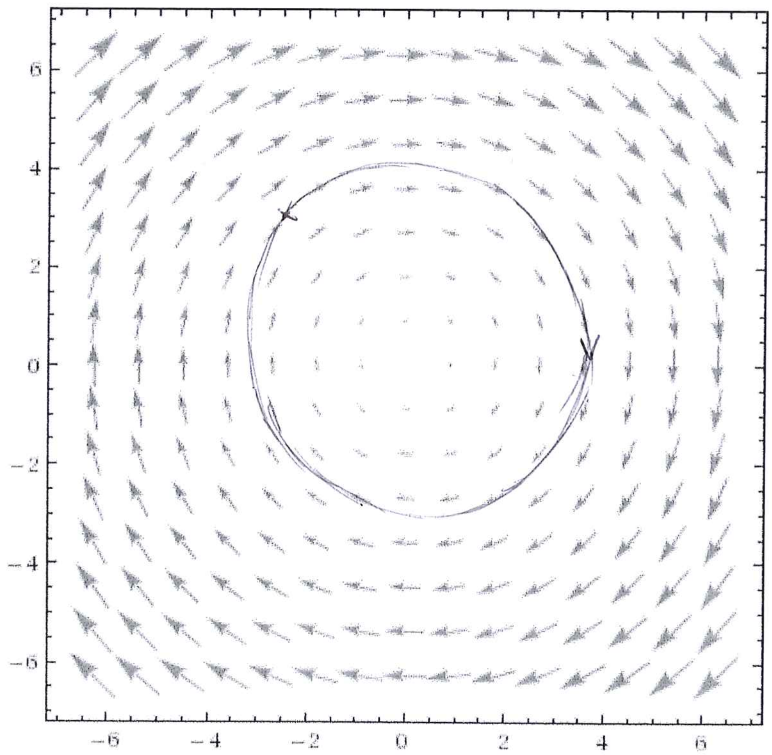


$(\dot q, \dot p) = \left(\frac{p}{ML^2}, -MLg\sin(q)\right)$ (mit $M=L=g=1$ gezeichnet)

(Phasenraum des Pendels)

$(q \equiv \theta)$

✓ cool!



$(\dot q, \dot p) = \left(\frac{p}{m}, -kq\right)$ (mit $m=k=1$ gezeichnet)

$(q \equiv x)$ (Phasenraum des harm. Osc.)

✓

$\cancel{8}.4.$ $L_i = \varepsilon_{ijk} p_j q_k$

$$\Rightarrow \frac{\partial L_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \varepsilon_{ijk} p_j q_k = \frac{\partial}{\partial p_i} \varepsilon_{iik} p_i q_k = \varepsilon_{iik} q_k$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \varepsilon_{ijk} p_j q_k = \frac{\partial}{\partial q_i} \varepsilon_{iji} p_j q_i = \varepsilon_{iji} p_j$$

$$\Rightarrow \{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L_i}{\partial q_k}\frac{\partial L_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L_j}{\partial p_k}\frac{\partial L_j}{\partial q_k}$$

$$= \sum_k \varepsilon_{ilk} p_l \cdot \varepsilon_{jkm} q_m - \varepsilon_{ikp} q_p \cdot \varepsilon_{jqk} p_q$$

$$= \sum_k - \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{jmk} p_l q_m + \varepsilon_{ipk} \varepsilon_{jqk} q_p p_q$$

$$= - \delta_{i[j} \delta_{m]l} p_l q_m + \delta_{i[j} \delta_{q]p} q_p p_q$$

$$= \cancel{-\delta_{ij} \delta_{ml} p_l q_m} + \delta_{im} \delta_{jl} p_l q_m + \cancel{\delta_{ij} \delta_{qp} q_p p_q} - \delta_{iq} \delta_{jp} q_p p_q$$

$$= \cancel{\delta} \; p_j q_i - q_j p_i$$

$$\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} q_l p_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} q_l p_m$$

$$= \delta_{i[l} \delta_{m]j} p_m q_l = \delta_{il} \delta_{mj} q_l p_m - \delta_{im} \delta_{lj} p_m q_l$$

$$= q_i p_j - q_j p_i \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k = q_i p_j - q_j p_i$$

10/10