Theoretische Physik II
7. Übungsblatt

Jannis Andrija SCHNITZER
Tutorin: Jenny SCHOBER, MO16

7.1	7.2	7.3	Σ
10	11,5	15,5	37

7.1 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[I_0\left(\dot\Theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\Theta\right) + I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\Theta\right)^2\right] - mgl\cos\Theta$

(a) gesucht: DGL'en für φ, ψ und Θ.

(i) $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$ ✓

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial}{\partial\dot\varphi}\frac{1}{2}\left[I_0\dot\varphi^2\sin^2\Theta + I_3\left(2\dot\psi\dot\varphi\cos\Theta + \dot\varphi^2\cos^2\Theta\right)\right]$ ✓ ✓ ✓

$= I_0\cdot\dot\varphi\cdot\sin^2\Theta + I_3\dot\psi\cos\Theta + I_3\dot\varphi\cos^2\Theta$

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = I_0\ddot\varphi\sin^2\Theta + I_3\ddot\psi\cos\Theta + I_3\ddot\varphi\cos^2\Theta$ ✓ ✓ ✓

$+ I_0\dot\varphi 2\sin\Theta\cos\Theta\dot\Theta - I_3\dot\psi\sin\Theta\dot\Theta - I_3\dot\varphi 2\cos\Theta\sin\Theta\dot\Theta$ ✓ ✓ ✓

$\underset{\text{EL}}{\overset{!}{=}} 0$ ✓

(ii) $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} - \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}}_{=0} = 0$ ✓ $\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = I_3\dot\psi + I_3\dot\varphi\cos\Theta$ ✓

$\Rightarrow I_3\ddot\psi + I_3\ddot\varphi\cos\Theta - I_3\dot\varphi\sin\Theta\dot\Theta = 0$ ✓

(iii) $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Theta} = 0$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Theta} = I_0\dot\varphi\sin\Theta\cos\Theta - I_3\dot\psi\dot\varphi\sin\Theta$ ✓

$- I_3\dot\varphi^2\sin\Theta\cos\Theta + mgl\sin\Theta$ ✓ ✓

$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Theta} = I_0\ddot\Theta$ ✓

$\Rightarrow 0 = I_0\ddot\Theta - I_0\dot\varphi^2\sin\Theta\cos\Theta + I_3\dot\psi\dot\varphi\sin\Theta + I_3\dot\varphi^2\sin\Theta\cos\Theta - mgl\sin\Theta$ ✓

4/4

(b) $L_3' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = I_0\dot\varphi\sin^2\Theta + I_3\dot\psi\cos\Theta + I_3\dot\varphi\cos^2\Theta$

$L_3 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = I_3\dot\psi + I_3\dot\varphi\cos\Theta$

$E = T + V = \frac{1}{2}\left[\dot\varphi\left(I_0\dot\varphi\sin^2\Theta + I_3\dot\psi\cos\Theta + I_3\dot\varphi\cos^2\Theta\right) + I_0\dot\Theta^2\right.$ ✓

$\left. + \dot\psi\left(I_3\dot\psi + I_3\dot\varphi\cos\Theta\right)\right] + mgl\cos\Theta$ ✓

$= \frac{1}{2}\left[\dot\varphi L_3' + \dot\psi L_3 + I_0\dot\Theta^2\right] + mgl\cos\Theta$

Ein paar Umformungen:

$$L_3' = I_0 \cdot \dot\varphi \sin^2\theta + I_3 \dot\psi \cos\theta + I_3 \dot\varphi \cos^2\theta$$
$$L_3 = I_3 \dot\psi + I_3 \dot\varphi \cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot\varphi \cdot (I_0 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta) = L_3' - I_3 \dot\psi \cos\theta$$
$$\dot\varphi \, (I_3 \cos\theta) = L_3 - I_3 \dot\psi$$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{L_3' - I_3 \dot\psi \cos\theta}{I_0 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta} = \frac{L_3 - I_3 \dot\psi}{I_3 \cos^2\theta}$$

und

$$\dot\psi = \frac{L_3' - I_0 \dot\varphi \sin^2\theta - I_3 \dot\varphi \cos^2\theta}{I_3 \cos\theta} = \frac{L_3 - I_3 \dot\varphi \cos\theta}{I_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L_3'}{I_3 \cos\theta} - \frac{I_0 \dot\varphi \sin^2\theta}{I_3 \cos\theta} - \dot\varphi \cos\theta = \frac{L_3}{I_3} - \dot\varphi \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{L_3'}{I_3 \cos\theta} - \frac{L_3}{I_3} = \frac{I_0}{I_3} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \dot\varphi$$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{L_3' - L_3 \cos\theta}{I_0 \sin^2\theta} \checkmark$$

$$\Rightarrow \dot\psi = \frac{L_3}{I_3} - \dot\varphi \cos\theta = \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_3' \cos\theta - L_3 \cos^2\theta}{I_0 \sin^2\theta} \checkmark$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \dot\varphi L_3' + \frac{1}{2} \dot\psi L_3 + \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L_3'^2 - L_3 L_3' \cos\theta}{I_0 \sin^2\theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} - \frac{1}{2} \frac{L_3 L_3' \cos\theta - L_3^2 \cos^2\theta}{I_0 \sin^2\theta}$$
$$+ \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2 I_0 \sin^2\theta} \cdot \left(L_3'^2 - 2 L_3 L_3' \cos\theta + L_3^2 \cos^2\theta\right) + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(L_3' - L_3 \cos\theta)^2}{I_0 \sin^2\theta} \checkmark + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} \checkmark + \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 \checkmark + mgl\cos\theta \checkmark = \text{const.} \checkmark$$

4/4

(c) $u \equiv \cos\theta \Rightarrow \dot u = -\sin\theta \cdot \dot\theta \checkmark$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - u^2 \checkmark ; \; \frac{\dot u^2}{1-u^2} = \dot\theta^2 \checkmark$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot u^2}{1-u^2} + \frac{L_3^2}{2 I_3} + \frac{(L_3' - L_3 u)^2}{2 I_0 (1-u^2)} + mglu. \checkmark$$

2/2

7.2 (a) Differenzielle Zwangsbedingung:

$$\frac{dx}{dy} = \tan\theta \quad ✓ \qquad (\theta = 45°)$$

$$\Rightarrow dx - dy\tan\theta = 0$$

$$\Rightarrow f = \{1, -\tan\theta\} = \{1, -1\}. \ ✓$$

$$\bar{F} - m\ddot{\bar{x}} + \lambda \bar{f} = 0$$

$$\Rightarrow F^x - m\ddot{x} + \lambda f^x = 0 \ \wedge$$

$$F^y - m\ddot{y} + \lambda f^y = 0$$

$$\Rightarrow F^x + \lambda = m\ddot{x}$$

$$F^y - \lambda = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow F^x + F^y = m\ddot{x} + m\ddot{y}$$

Aus $\frac{dx}{dy} = \tan\theta = 1$ folgt $dx = dy \Rightarrow \dot{x} = \dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y}$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \Rightarrow F^x + F^y = -mg = 2m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{1}{2}mg \ ; \ m\ddot{y} = -\frac{1}{2}mg \qquad (✓)$$

$x(t) = ?$ $y(t) = ?$

3,5/4

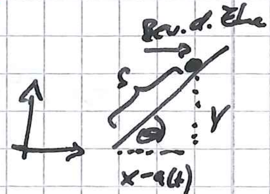
(b) Man "sieht", dass ~~...~~ die Beschleunigung des Teilchens parallel zur schiefen Ebene ~~...~~ $g\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}g$ ist. ✓ (Hangabtriebskraft)

Dies entspricht dem Ergebnis aus (a):

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}g \\ \frac{1}{2}g \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}g\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}g\right)^2} = \sqrt{2\left(\tfrac{1}{2}g\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}g = \frac{1}{\sqrt{2}}g. \ ✓$$

2/2

(c) $a(t) = \frac{1}{2}bt^2$



Zwangsbed.: ~~...~~

$$\frac{(x - a(t))}{y} = \tan\theta \quad ✓$$

$$\Rightarrow (x - a(t))\cos\theta - y\sin\theta = 0$$

$\theta = 45°$

$$\Rightarrow x - a(t) - y = 0. \ ✓$$

Dieser Zwang hängt von $a(t) = \frac{1}{2}bt^2$ ab, ist also rheonom. ✓

Einführung der verallgem. Koord. s (siehe Skizze).

$$x = s\cos\theta + a(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{s}\cos\theta + bt \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{s}\cos\theta + b$$

$$y = s\sin\theta \qquad\qquad \dot{y} = \dot{s}\sin\theta \qquad\qquad \ddot{y} = \ddot{s}\sin\theta$$

D'Alembert: $\bar{F}_g \delta\bar{x} = 0$

$$= \bar{F}_g \cdot \frac{\partial\bar{x}}{\partial s} \cdot \delta s = Q \cdot \delta s$$

$$\Rightarrow Q = \bar{F}_g \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial s}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -mg\sin\theta$$

(Hey, das sieht aus wie die Hangabtriebskraft!)

Bewegungsgleichg aus $\left[Q - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial}{\partial s}\right)T\right] = 0$

Dazu: $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2\cos^2\theta + 2\dot{s}bt\cos\theta + b^2t^2 + \dot{s}^2\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + 2\dot{s}bt\cos\theta + b^2t^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} + mbt\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s}\right) = m\ddot{s} + mb\cos\theta$$

$$\Rightarrow -mg\sin\theta - m\ddot{s} - mb\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = -g\sin\theta - b\cos\theta \underset{\theta=45°}{\overset{!}{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-g-b) \quad (\checkmark)$$

vergessenes "–" = Folgefehler

4/4

(d) $m\ddot{\bar{x}} = \bar{F}_g + \bar{F}^c \Rightarrow \bar{F}^c = m\ddot{\bar{x}} - \bar{F}_g$

$$m\ddot{\bar{x}} = m\begin{pmatrix} \ddot{s}\cos\theta + b \\ \ddot{s}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{F}^c = m\begin{pmatrix} \ddot{s}\cos\theta + b \\ \ddot{s}\sin\theta - g \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} g\sin\theta\cos\theta - b\cos^2\theta + b \\ g\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta - g \end{pmatrix}$$

2/2

mit $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ und $\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta \Rightarrow$

$$\bar{F}^c = mg\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\theta \\ -\cos^2\theta \end{pmatrix} - mb\begin{pmatrix} \sin^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \overset{\theta=45°}{\underset{!}{=}} \frac{1}{2}mg\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}mb\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

7.3 (a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}; \quad \frac{d\bar{x}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix}$ ✓

$$G[h] = L - \int |d\bar{x}| = L - \int_{-a}^{a} dx \left| \frac{d\bar{x}}{dx} \right| = L - \int_{-a}^{a} dx \sqrt{1 + h'(x)^2}$$ ✓ 2/2

(b) $V = \sum_i m_i g h_i$

$\Rightarrow F[h] = \int_{-a}^{a} dx \left(\sqrt{1+h'(x)^2}\, \mu g h(x) \right)$ ✓ wobei $\mu = \frac{M}{L}$. ✓ 2/2

(c) Bilde zunächst $F[h] - \tilde{\lambda} G[h] = \int_{-a}^{a} dx \left(\sqrt{1+h'^2}\, \mu g h \right) - \tilde{\lambda} L + \tilde{\lambda} \int_{-a}^{a} dx \sqrt{1+h'(x)^2}$

$$= \int_{-a}^{a} dx \left(\sqrt{1+h'^2} \left(\mu g h + \tilde{\lambda} \right) \right) - \tilde{\lambda} L$$

$\Rightarrow$ Extrem in h_0, wenn h_0 $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial h'} - \frac{\partial f}{\partial h} = 0$ erfüllt, wobei $f(h, h') = \sqrt{1+h'^2} \left(\mu g h + \tilde{\lambda} \right)$. ✓

Setze $\lambda := \frac{\tilde{\lambda}}{\mu g}$

$$\Rightarrow f(h, h') = \mu g \sqrt{1+h'^2} \left(h + \lambda \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \mu g \sqrt{1+h'^2}$$ ✓

$$\frac{\partial f}{\partial h'} = \mu g (h+\lambda) \cdot \frac{2h'}{2\sqrt{1+h'^2}}$$ ✓

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial h'} = \mu g \frac{\left[\frac{d}{dx}(h-\lambda)h'\right]\sqrt{1+h'^2} - \left[\frac{d}{dx}\sqrt{1+h'^2}\right](h+\lambda)h'}{1+h'^2}$$

$$= \mu g \frac{\left[h'^2 + (h+\lambda)h''\right]\sqrt{1+h'^2} - \left[\frac{2h'h''}{2\sqrt{1+h'^2}}\right](h+\lambda)h'}{1+h'^2}$$

Erw. mit $\sqrt{1+h'^2}$

$$= \mu g \frac{\left[h'^2 + (h+\lambda)h''\right](1+h'^2) - h'^2 h'' (h+\lambda)}{(1+h'^2) \cdot \sqrt{1+h'^2}}$$

$$= \mu g \frac{h'^2 (1+h'^2) + (h+\lambda) h''}{(1+h'^2)\sqrt{1+h'^2}}$$

$\Rightarrow$ ELG: $\mu g \frac{h'^2(1+h'^2) + (h+\lambda)h''}{(1+h'^2)\sqrt{1+h'^2}} - \mu g \sqrt{1+h'^2} = 0$

~~Hinteren Bruch~~ Hinteren Bruch mit $\sqrt{1+h'^2}$ erw., dann insges. mit $\sqrt{1+h'^2}$ mult.

$$\Leftrightarrow \frac{h'^2(1+h'^2) + (h+\lambda)h''}{(1+h'^2)} - (1+h'^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow h'^2 - 1 - h'^2 + \frac{(h+\lambda)h''}{(1+h'^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{(h+\lambda)h''}{(1+h'^2)} = 0 \quad \Leftrightarrow (1+h'^2) - (h+\lambda)h'' = 0$$ ✓

Setze $g(x) = h(x) + \lambda$; $g'(x) = h(x)$; $g''(x) = h''(x)$

$\Rightarrow 1 + g'^2 - g \cdot g'' = 0$ ✓ ③/3

(d) Bilde $\frac{d}{dx}[1 + g'^2 - gg''] \overset{✓}{=} 2g'g'' - (gg''' + g'g'') = 0$

$= g'g'' - gg''' \overset{\cdot(-1)}{=} gg''' - g'g''$

Bilde nun $\frac{d}{dx}\left(\frac{g''}{g}\right) = \frac{g'''g - g'g''}{g^2} = 0$ da Zähler 0 ✓ ②/2

(e) Im Fall von g_1 sorgt die Addition eines Summanden auf den Cosinus dafür, dass der Graph der Funktion neben einer Streckung bzw. Stauchung außerdem nach rechts bzw. links verschoben wird.
Der Cosinus aber ist spiegelsymmetrisch an der y-Achse; und unsere Anfangsbedingungen requirieren eine Aufhängung an zwei gleich weit horizontal von dieser entfernten Punkten. Daher muss hier $B=0$ sein, ✓ denn intuitiv ist klar, dass die homogene Kette nicht unsymmetrisch geformt hängen würde.

$c > 0 \Rightarrow g_2$
$c < 0 \Rightarrow g_1$

Im Fall von g_2 würde die Addition des mon. wachsenden sinh ebenfalls für Asymmetrie sorgen. ①/2

(f) $g_1(x) = A\cos(\sqrt{c}\,x)$

$g_1'(x) = -A\sqrt{c}\sin(\sqrt{c}\,x)$

$g_1''(x) = -Ac\cos(\sqrt{c}\,x)$

In (1): $1 + A^2c\sin^2(\sqrt{c}\,x) + A^2c\cos(\sqrt{c}\,x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + A^2c = 0$

Da $c > 0$, ist dies unmöglich. □ ✓

$g_2(x) = A\cosh(\sqrt{c}\,x)$

$g_2'(x) = A\sqrt{c}\sinh(\sqrt{c}\,x)$

$g_2''(x) = Ac\cosh(\sqrt{c}\,x)$

In (1): $1 + A^2c\sinh(\sqrt{c}\,x) - A^2c\cosh(\sqrt{c}\,x) = 0$

Mit $\sinh^2(\theta) - \cosh^2(\theta) = -1$:

$1 - A^2c = 0 \Rightarrow A^2c = 1 \quad \square$ ✓ 2/2

(g) Durch Umformung der obigen Identität lässt sich $c = \frac{1}{A^2} \Rightarrow \sqrt{c} = \left|\frac{1}{A}\right|$ eindeutig festlegen.

Mit der Zwangsbedingung $G[h]$ ergibt sich dann:

~~$L = \int_{-a}^{a}$ konstante~~ $\cancel{L = \int_{-a}^{a} dx \sqrt{1+\sinh(\frac{1}{A}x)}}$.

$$L = \int_{-a}^{a} dx \sqrt{1+\sinh^2\left(\tfrac{1}{A}x\right)} = \int_{-a}^{a} dx \sqrt{\cosh^2\left(\tfrac{1}{A}x\right)}$$

$$\left(\sinh^2(\theta) - \cosh^2(\theta) = -1 \Rightarrow \sinh^2(\theta) + 1 = \cosh^2(\theta)\right)$$

$$= \int_{-a}^{a} dx \cosh\left(\tfrac{1}{A}x\right) = A\sinh\left(\tfrac{1}{A}x\right)\Big|_{-a}^{a} = A\left(\sinh\left(\tfrac{a}{A}\right) - \sinh\left(\tfrac{-a}{A}\right)\right)$$

$$\left(\sinh(\theta) = -\sinh(-\theta)\right)$$

(✓)

$= 2A\sinh\left(\frac{\cancel{2}a}{A}\right) = L$. Aus diesem Ausdruck kann numerisch A gewonnen werden. ✓

Ist A schliesslich bekannt, so kann durch $h(a) = b$ auch λ gewonnen werden: $A\cosh\left(\frac{1}{A}a\right) - \lambda = b$ ✓ muss dazu umgeformt werden. 2,5/3

(h) Für $L = 2a$ gilt $\sinh\left(\frac{2a}{A}\right) = \frac{2a}{A}$, und offensichtlich, ~~[illegible]~~ da die Kette nahezu gerade hängen muss, ✓ und $\cosh(0) = 1$ gilt, $A - \lambda = b$. ($\sinh\left(\frac{2a}{A}\right) = \frac{2a}{A}$ gilt für $A \to \infty$, ~~und~~ damit $c \to 0$)

weiter mit Taylorreihe von sinh...

1/2