ANALYTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK
Prof. Arthur HEBECKER
S. Kraus & C. Mayrhofer

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2012

Jannis Andrija SCHNITZER
Gruppe 15
Tutor: Jenny SCHOBER, Mo 16

# 5. ÜBUNGSBLATT

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 9,5 | ~~10~~ 8 | 6,5 | ~~35~~ 33 |

Die schriftlichen Aufgaben sind am 21.05.2012 in den Tutorien abzugeben.

**Aufgabe 5.1** (12 Punkte):
Eine Leiter der Masse $M$ und Länge $l$ lehne unter dem Winkel $\theta_0 = \measuredangle(\text{Horizontalen}, \text{Leiter})$ an der Wand und beginne zu rutschen. Berechnen Sie den Bewegungsablauf für das Weggleiten der Leiter unter der Annahme, dass die Reibung sowohl an der Wand als auch am Boden vernachlässigbar klein ist.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$ und die dazugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an.

b) Aus der Zeittranslationsinvarianz dieses Systems folgt Energieerhaltung; Geben Sie die Erhaltungsgröße an.

c) Leiten Sie eine implizite Beschreibung für $\theta(t) \in [0 = \theta(T), \theta_0 = \theta(0)]$ her, das heißt eine Funktion für die Zeit in Abhängigkeit vom Winkel, $t = f(\theta)$, wobei für $f(\theta)$ der Integralausdruck ausreichend ist.
*Hinweis*: Sollten sich die Bewegungsgleichungen nicht direkt lösen lassen, ist es hilfreich die Symmetrien des Systems und die daraus resultierenden Erhaltungsgrößen auszunutzen.

d) Berechnen Sie den Winkel bei welchem die Leiter aufhört die Wand zu berühren.
*Hinweis*: Studieren Sie die Horizontalgeschwindigkeit und die zugehörige Beschleunigung des Schwerpunktes.

e) Berücksichtigen Sie nun den zusätzlichen Freiheitsgrad und stellen Sie erneut die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen auf. Zeigen Sie, dass Horizontalbewegung und Rotation entkoppeln.

f) *Freiwilliger Zusatzpunkt*: Vergleich Sie a) mit dem Umkippen einer Leiter, die von einer Person freistehend aus dem Winkel $\theta_0$ losgelassen wird und ohne Rutschen umfällt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die kinetische Energie aus Schwerpunktsbewegung und Rotation um den Schwerpunkt der Rotationsenergie um das Leiterende entspricht. Welcher Beitrag wird vernachlässigt, würde man in a) die kinetische Energie als Rotation um das Leiterende und deren Translation ansetzen? (Siehe Vorlesung.)

**Aufgabe 5.2** (10 Punkte):

a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente $I_i = I_{ii}$ eines homogenen Ellipsoids (Masse $M_E$) mit den Halbachsen $a$, $b$ und $c$. Begründen Sie warum die Nebendiagonalelemente von $I_{ij}$ verschwinden, wenn das Koordinatensystem mit den Halbachsen übereinstimmt.

b) Die Massenverteilung der Erde kann durch ein homogenes Rotationsellipsoid ($a = b$) angenähert werden. Die Abplattung der Erde ist durch $(a - c)/a \approx 1/300$ gegeben. Wie groß ist dann $\Delta I/I = (I_3 - I_1)/I_3$?

c) Bestimmen Sie den Trägheitstensor einer homogenen Kugel (Radius $R$, Masse $M_K$), auf deren Äquator vier zusätzliche Punktmassen $m$ gleichabständig (bei $\phi = 0,\ \pi/2,\ \pi$ und $3\pi/2$) angebracht sind. Wählen Sie die Parameter $R$ und $m$ so, dass der Trägheitstensor gleich dem eines homogenen Rotationsellipsoids mit der Masse $M_E = M_K + 4m$ ist.

**Aufgabe 5.3** (8 Punkte):
Ein homogener (voller) Zylinder und eine homogene Vollkugel mit Radius $R$ und Masse $M$ rollen eine schiefe Ebene der Länge $l$ und der Neigung $\phi$ hinab.

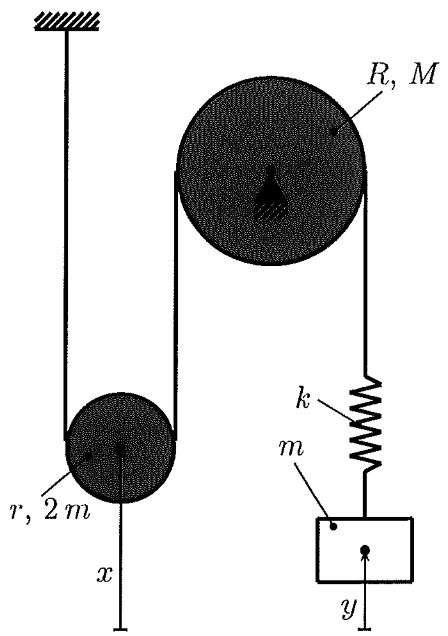
a) Stellen Sie jeweils Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichung auf.

b) Berechnen Sie das jeweilige Trägheitsmoment.

c) Bestimmen Sie die jeweilige Laufzeit für beide Körper.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Laufzeit einer reibungsfrei gleitenden Punktmasse.

**Aufgabe 5.4** (10 Punkte):
Gegeben sei die folgende Anordnung von Umlenkrollen:



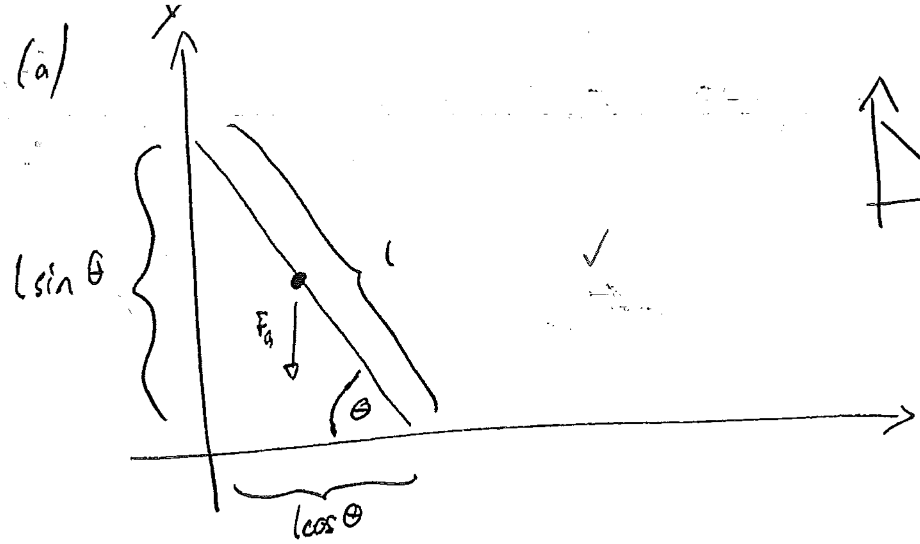

wobei $2m$, $M$ und $m$ die Massen der Umlenkrollen bzw. des Gewichtes sind, $r$ und $R$ seien die Radien der Rollen und $k$ ist die Federkonstante der dem Gewicht vorgelagerten Feder. Weiterhin sei das Seil vernachlässigbar leicht und soll idealisierter Weise sowohl auf Zug als auch auf Druck starr sein. Die Umlenkrollen seinen als Vollzylinder anzunehmen.

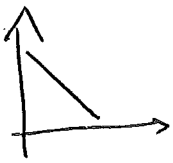
a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ auf und geben Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen an.

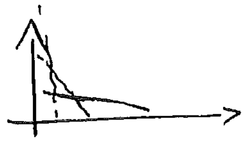
b) Zeigen Sie, dass $x \to x + \frac{1}{2}\delta$, $y \to y - \delta$ die Lagrange-Funktion invariant lässt und berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.

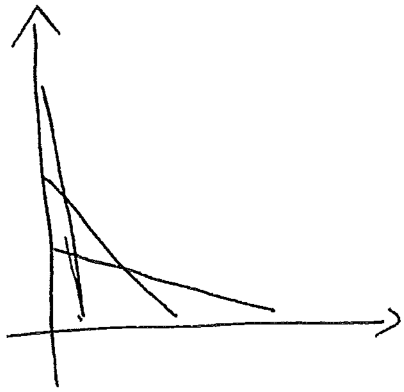
c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen $\dot{x} = \dot{y} = 0$ und $x(0) - x_0 = 2(y(0) - y_0) = \Delta$, wobei $x_0$ und $y_0$ der Position der beweglichen Umlenkrolle bzw. des Gewichtes einer der statischen Konfigurationen des Systems entsprechen.
*Hinweis*: Ein möglicher Weg dieses Problem zu lösen ist die zyklische Variable dieses Systems zu nutzen, siehe Vorlesung und b).

1. (a)







✓

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$T = T_{trans} + T_{rot}$$

$$\cancel{V =} \qquad T_{rot} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^{\cdot 2} + \frac{1}{2} M \left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)^{\cdot 2}$$

$$\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^{\cdot} = \frac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$ ✓

$$\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)^{\cdot} = -\frac{l}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$ ✓

$$\Rightarrow T = \cancel{\frac{1}{2} M \frac{l}{2} (\cos\theta - \sin}$$

$$\frac{1}{2} M \left(\left(\frac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}\right)^2 + \left(-\frac{l}{2}\sin\theta \cdot \dot{\theta}\right)^2\right) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$ ✓

$$= \frac{1}{2} M \left(\frac{l^2}{4}\cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\theta \cdot \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{8} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} M l^2 \dot{\theta}^2$$ ✓

Berechnung von I fehlt.

$$T = \frac{1}{2} M \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \qquad V = M \cdot g \cdot \frac{l}{2} \sin\theta \checkmark$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mg\frac{l}{2} \sin\theta$$

with/mit $I = \frac{1}{12} M l^2$ ✓:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{24} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{24} M l^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{l}{2} \sin\theta$$

$$= \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 - Mg \frac{l}{2} \sin\theta \checkmark$$

$$= \frac{1}{2} M \left( \frac{1}{3} l^2 \dot{\theta}^2 - g l \sin\theta \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} M l^2 \dot{\theta}\right) + Mg\frac{l}{2} \cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cancel{M} l^{\cancel{2}} \ddot{\theta} = - \cancel{M} g \frac{\cancel{l}}{2} \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} l \ddot{\theta} = - \frac{1}{2} g \cos\theta \checkmark$$

2,5 / 3

(b) $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = E = $ ✓

$$= \frac{1}{3} M l^2 \dot{\theta}^2 - \mathcal{L} = E = \frac{1}{3} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin\theta$$

$$= E = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin\theta \checkmark = T + V = E = T+V = E$$

2 / 2

c) $E = T + V = \frac{1}{6} M l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M g l \sin\theta$

$$E = \frac{1}{6} M L^2 \underbrace{\dot\theta_0^2}_{=0} + \frac{1}{2} M L g \sin\theta_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot\theta^2 = \frac{E - \frac{1}{2} M g l \sin\theta}{\frac{1}{6} M l^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} \overset{\downarrow}{=} -\sqrt{\frac{E - \frac{1}{2} M g l \sin\theta}{\frac{1}{6} M l^2}}$$

positive Lösung $\hat{=}$ Aufrichten der Leiter

$$\Leftrightarrow \quad dt = -\sqrt{\frac{\frac{1}{6} M l^2}{E - \frac{1}{2} M g l \sin\theta}} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \quad t = -\int \sqrt{\frac{1/6\, M l^2}{E - 1/2\, M g l \sin\theta}}\, d\theta$$

1/2

d) $x_{sp} = \frac{l}{2} \cos\theta \qquad y_{sp} = \frac{l}{2} \sin\theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot x_{sp} = \left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)^{\cdot\cdot} = \cancel{\left(-\frac{l}{2}\sin\theta\cdot\dot\theta\right)^{\cdot} = \left(-\frac{l}{2}\cos\theta\cdot\dot\theta^2 - \frac{l}{2}\sin\theta\cdot\ddot\theta\right)}$$

$$= \frac{l}{2} (\cos\theta)^{\cdot\cdot} = \frac{l}{2} \left(\dot\theta \cdot (-\sin\theta)\right)^{\cdot}$$

$$= \frac{l}{2} \dot\theta \cdot (-\cos\theta \cdot \dot\theta) + \frac{l}{2} \cdot \ddot\theta \cdot (-\sin\theta)$$

$$= -\frac{l}{2} \left(\dot\theta^2 \cos\theta + \ddot\theta \sin\theta\right) \checkmark$$

Nach Newton wird auf die Leiter, solange sie Kontakt zur Wand hat, ~~durch~~ letztere eine Normalkraft ausgeübt. Um für grosse $\theta$ den Kontakt aufrechtzuerhalten müsste diese Normalkraft irgendwann negativ sein. D.h. die Analyse von $\ddot x_{sp} = 0$, d.h. einen Vorzeichenwechsel der horizontalen Schwerpunktsbeschleunigung, liefert den Grenzwinkel. ✓

Dazu:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\Theta \quad ✓$$

$$\frac{\frac{1}{2}Mgl\,(1-\sin\Theta)}{\frac{1}{6}Ml^2} = \frac{6}{2}\frac{g}{l}(1-\sin\Theta) = 3\frac{g}{l}$$

$$\underbrace{E = \frac{1}{2}Mgl}_{= \frac{1}{2}ML\left(\frac{1}{3}L\dot{\Theta}_0^2 + g\sin\Theta_0\right)} \Rightarrow \dot{\Theta}^2 = \frac{\frac{1}{2}Mgl - \frac{1}{2}Mgl\sin\Theta}{\frac{1}{6}Ml^2}$$

$\dot{\Theta}_0 = 0$, $\Theta_0$: Startwinkel

$$= \underbrace{3\frac{g}{l}(1-\sin\Theta)}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{l}{2}\left(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{g}{l}(1-\sin\Theta)\cos\Theta = +\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\Theta\sin\Theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\Theta_0 = 0 \Leftrightarrow \Theta_0 = 90° \quad ✓$$

oder $(1-\sin\Theta_0) = +\frac{1}{2}\sin\Theta_0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{3}{2}\sin\Theta_0$$

$$\Leftrightarrow \sin\Theta_0 = \frac{2}{3}$$

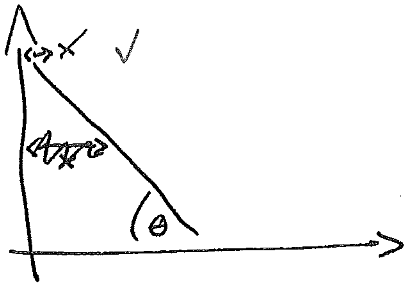
$$\Rightarrow \Theta_0 = \underbrace{\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 41{,}81°$$

$$= \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\Theta_0\right)$$

+ 3. Lösung: $\dot{\Theta} = 0$

2 ~~1,5~~ 13

(e)




$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \left(\frac{l}{2} \underset{\cos}{\sin}\theta\right)^{\cdot 2} + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M g l \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} M \left(\frac{l}{2} \dot{\theta} \underset{\cos}{\sin}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{24} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M g l \sin\theta$$

$$= \frac{1}{8} M l^2 \dot{\theta}^2 \underset{\cos^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{24} M l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} M g l \sin\theta$$

ELG: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin^2(\theta) &= \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{df}\frac{df}{dt} f^2 & \\ &= 2\sin\theta \cdot \frac{d}{dt}\sin\theta \\ &= 2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \dot{\theta} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} M l \dot{\theta} \underset{\cos}{\sin^2}\theta + \frac{1}{12} M l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{1}{8} M l^2 \dot{\theta}^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2} M g l \cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} M l \ddot{\theta} \sin^2\theta + \frac{1}{4} M l \dot{\theta} \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{12} M l^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \text{ELG}: \quad \frac{1}{4} Ml \ddot{\theta} \sin^2\theta + \frac{1}{4} Ml \dot{\theta} \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{12} Ml^2 \ddot{\theta}$$

$$- \frac{1}{4} Ml^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2} Mgl\cos\theta = 0 \quad (I)$$

Rechenfehler ...

und $M\ddot{x} = 0 \quad (II)$ ✓

Man sieht sofort: (I) ist nicht von $x$ oder seinen Ableitungen abhängig; (II) nicht von $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ etc. □

1,5 / 2

f) fehlt

2.a) Das allgemeine Ellipsoid ist wie folgt definiert:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ ✓

Wenn wir die Koordinatentransformation

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta$$ ✓

$$\left( \frac{dx}{d\xi} = a, \quad \frac{dy}{d\eta} = b, \quad \frac{dz}{d\zeta} = c \right)$$

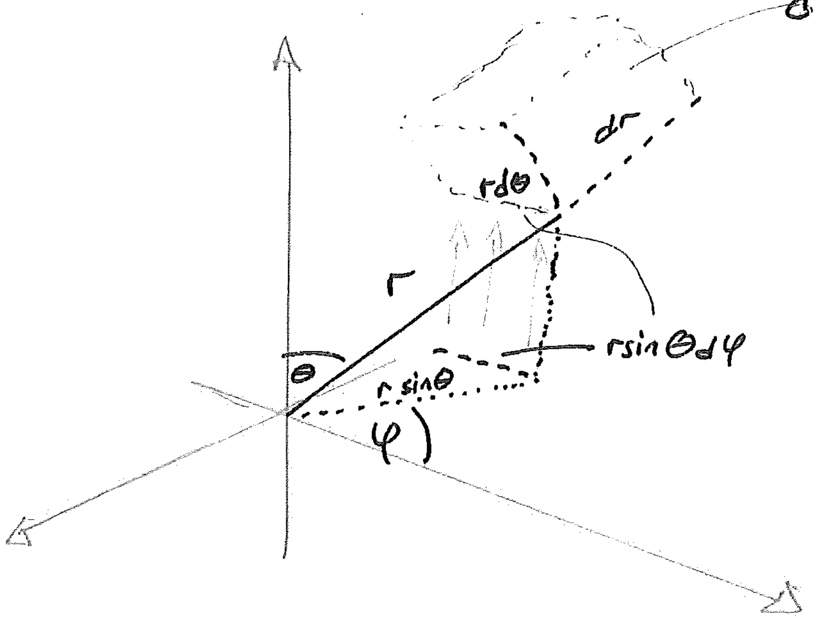
durchführen, erhalten wir im Zielsystem eine Einheitskugel.

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int_V \rho \cdot (y^2+z^2) \cdot dV = \int_V \rho \left(b^2\eta^2 + c^2\zeta^2\right) \cdot a\,d\xi\, b\,d\eta\, c\,d\zeta$$

Integration über eine Kugel:

✓

$dV = dr \cdot r\,d\theta \cdot r\sin\theta\, d\varphi$




schön!

$$I_1 = \varrho abc \int_{V_\Phi} b^2\eta^2 + c^2 \zeta^2 \underbrace{d\xi\, d\eta\, d\zeta}_{dV}$$

$$\xi = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$\eta = r \sin\theta \sin\varphi \quad \checkmark$$
$$\zeta = r\cos\theta$$

$$\Rightarrow I_1 = \varrho abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} b^2 r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 r^2 \cos^2\theta \, dr\, r d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi$$

$$= \varrho abc \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} b^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\theta \, d\theta \cdot \sin\theta\, d\varphi$$

$$= \varrho abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} b^2 \sin^3\theta \sin^2\varphi \, d\theta d\varphi + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} c^2 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta d\varphi \right]$$

$\downarrow$ $\theta$-Integral

$$= \varrho abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[ \frac{4}{3} b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + \frac{2}{3} c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$\left( \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4}{3} \; ; \; \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta = \frac{2}{3} \right)$$

$$= \varrho abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[ \frac{4}{3} b^2 \cdot \pi + \frac{2}{3} c^2 \cdot 2\pi \right]$$

$$= \varrho abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3}\pi (b^2 + c^2) = \frac{1}{5} M_E (b^2 + c^2) \quad \checkmark$$

$$\left( M_E = \frac{4}{3}\pi abc\varrho \right)$$

~~Aus Symmetriegründen~~

Zyklische Vertauschung der $a, b, c$ gibt:

$$I_2 = \frac{1}{5} M_E (a^2 + c^2) \checkmark$$

$$I_3 = \frac{1}{5} M_E (a^2 + b^2) \checkmark$$

Die Symmetrien des Ellipsoids haben die Halbachsen als Symmetrieachsen.

Wir wissen aus der Vorlesung:

1. jeder Trägheitstensor lässt sich als Ellipsoid darstellen.
2. Das Trägheitsellipsoid besitzt Symmetrieachsen dort, wo die Hauptträgheitsachsen liegen. ✓
3. Das Trägheitsellipsoid folgt der Form des Körpers. ✓

$\Rightarrow$ Die Symmetrieachsen unseres Ellipsoids sind die Hauptträgheitsachsen ✓

$\Rightarrow$ Der Trägheitstensor nimmt im Hauptträgheitsachsensystem Diagonalform an. ✓

4/14

b) $\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_3 - I_1}{I_3}$. $a = b$; $\frac{a-c}{a} \approx \frac{1}{300}$

$\Rightarrow a - c = \frac{1}{300} a \Rightarrow c = \frac{299}{300} a$.

$I_1 = \frac{1}{5} M_E \cdot (b^2 + c^2) = \frac{1}{5} M_E \cdot \left(a^2 + \left(\frac{299}{300} a\right)^2\right)$ $\quad I_3 = \frac{1}{5} M_E (a^2 + a^2)$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_3 - I_1}{I_3} = \frac{\frac{1}{5} M_E \left(a^2 + a^2\right) - \frac{1}{5} M_E \left(a^2 + \left(\frac{299}{300}a\right)^2\right)}{\frac{1}{5} M_E \left(a^2 + a^2\right)}$$

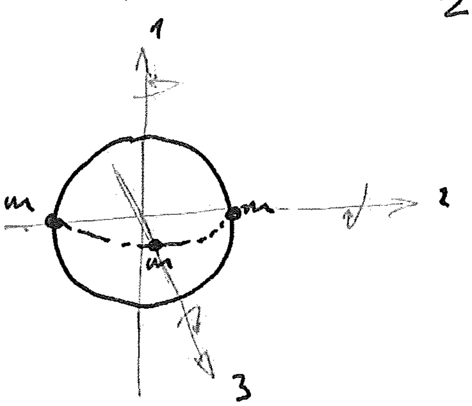
$$= \frac{a^2 + a^2 - a^2 - \left(\frac{299}{300} a\right)^2}{a^2 + a^2}$$

$$= \frac{a^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{299}{300}\right)^2\right)}{2a^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{299^2}{300^2}}{2} = \frac{599}{180\,000} \approx 0{,}003328 \checkmark$$

2/2

c)




$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$ ~~[illegible]~~

Die Hauptträgheitsmomente müssen aus Symmetriegründen den eingezeichneten Achsen als Hauptträgheitsachsen entsprechen.

Da Trägheitsmomente additiv sind, gilt mit Steiner:

$$I_1 = I_{Kugel} + 4mR^2 \checkmark$$

$$I_2 = I_3 = I_{Kugel} + 2mR^2 \checkmark$$

$\boxed{\text{siehe nächste Seite!}}$

< Herleitung $I_{Kugel}$ >

$$\Rightarrow \quad I_1 = \left(\frac{2}{5} M_K + 4m\right) R^2$$

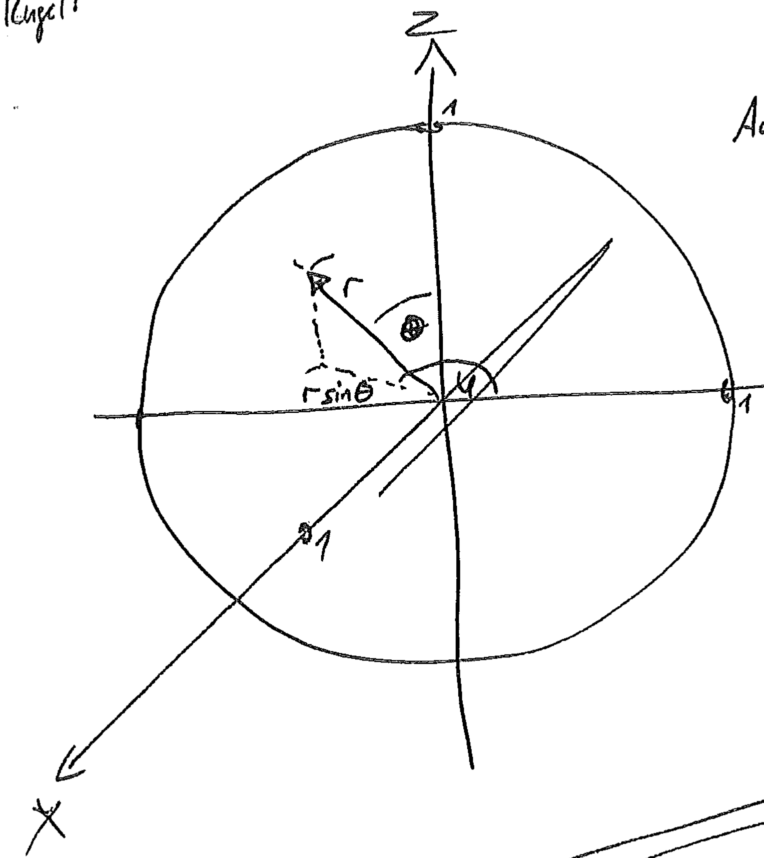
$$I_2 = I_3 = \left(\frac{2}{5} M_K + 2m\right) R^2$$

$$\Rightarrow I = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{5}M_K + 4m\right)R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}M_K + 2m\right)R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{5}M_K + 2m\right)R^2 \end{pmatrix} \checkmark$$

im Hauptachsensystem.

Kugel:

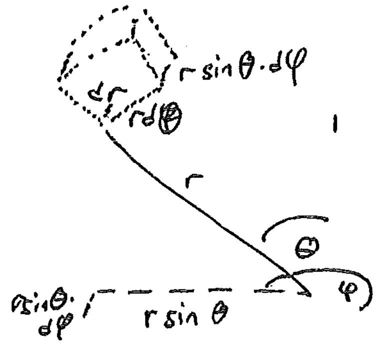
|<Herleitung $I_{Kugel}$>|




Ansatz: $I_1+I_2+I_3 = \int_V \rho\cdot(x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2)\cdot dV$

$= 2\int_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,dV$

$= 2\int_V \rho r^2\, dV$ sowie $I_1=I_2=I_3$




Also ist $dV =$ ~~dr dφ~~

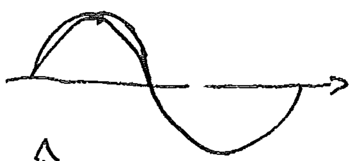
$dr\cdot\ r d\theta\cdot\ r\sin\theta\, d\varphi$

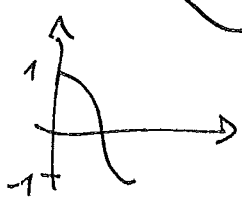
$$\Rightarrow\quad 2\rho\int_V r^2\, dV = 2\rho \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2\, dr\ r\,d\theta\ r\sin\theta\, d\varphi$$

$$= 2\rho \int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$

einfacher: Nehme $\hat{I}$ aus (a)
und setze $a=b=c\overset{!}{=}R$
$\Rightarrow I=\frac{2}{5}MR^2$

$$= 2\rho\cdot\frac{1}{5}R^5\cdot\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}$$






$$= 2\rho\cdot\frac{1}{5}R^5\cdot(+2)\cdot 2\pi$$

$$= \cancel{2\rho}\cdot 2\cdot\rho\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{3}{4}\cdot(+2)\cdot 2\cdot\frac{1}{5}R^2$$

$$= 2\cdot M\cdot +3\frac{1}{5}R^2 = +\frac{6}{5}MR^2 \Rightarrow I=\frac{2}{5}MR^2$$ ✓

Homogenes Rotationsellipsoid:

Wähle $b = c$ als gleiche Halbachsen (statt $a = b$ wie oben)

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_{Ell} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(M_K+4m)(2b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}(M_K+4m)(a^2+b^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}(M_K+4m)(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

Wir fordern $\underline{I}_{Ell} = \underline{I}$ ✓

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}M_K + 4m\right)R^2 = \frac{1}{5}(M_K+4m)\cdot(2b^2) \quad \text{(I)} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{2}{5}M_K + 2m\right)R^2 = \frac{1}{5}(M_K+4m)\cdot(a^2+b^2) \quad \text{(II)}$$

(I): $$\frac{2}{5}M_K R^2 + 4mR^2 = \frac{2}{5}M_K\cdot b^2 + \frac{2}{5}\cdot 4m\cdot b^2$$

(II): $$\frac{2}{5}M_K R^2 + 2mR^2 = \frac{1}{5}M_K(a^2+b^2) + \frac{2}{5}\cdot 2m\cdot(a^2+b^2)$$

$$\cancel{R^2 = \frac{\frac{2}{5}(M_K+4m)\,b^2}{\frac{2}{5}M_K+4m}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \left(\frac{2}{5}M_K + 2m\right)\cdot\frac{\frac{2}{5}M_K+\frac{8}{5}m}{\frac{2}{5}M_K+4m}\,b^2 = \frac{1}{5}M_K a^2 + \frac{4}{5}ma^2 + \frac{1}{5}M_K b^2 + \frac{4}{5}mb^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{10}\overset{(M_E-4m)}{\overset{\|}{M_K}}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right) \rightarrow m(M_E) = \ldots$$

$$R = b\cdot\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)}$$

Rechnungen siehe nächste Seiten

hier dürfte ein Faktor $\frac{3}{2}$ fehlen.

$$\frac{2}{5} M_K R^2 + 4mR^2 = \frac{1}{5} M_E \cdot (b^2 + b^2)$$

$$= \frac{2}{5} M_K b^2 + \frac{2}{5} 4m b^2$$

$$= \frac{2}{5} M_K b^2 + \frac{2}{5} \cdot 4m \cdot b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5} M_K R^2 + 2mR^2 = \frac{1}{5} M_K (a^2+b^2) + \frac{1}{5} \cdot 4m \cdot (a^2+b^2)$$

$$R^2 = \frac{\frac{2}{5} M_K b^2 + \frac{2}{5} \cdot 4m \cdot b^2}{\frac{2}{5} M_K + 4m} = b^2 \cdot \left( \frac{\frac{2}{5} M_K + \frac{2}{5} 4m}{\frac{2}{5} M_K + 4m} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{5} (M_K + 4m)(a^2+b^2)}{\frac{2}{5} M_K + 2m}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 \cdot \left( \frac{\frac{2}{5} M_K + \frac{2}{5} 4m}{(\frac{2}{5} M_K + 4m)} \right) = (a^2+b^2) \frac{\frac{1}{5} M_K + \frac{1}{5} 4m}{\frac{2}{5} M_K + 2m}$$

$$b^2 \cdot \left( \frac{\frac{2}{5} M_K}{\frac{2}{5} M_K + 4m} + \frac{\frac{2}{5} 4m}{\frac{2}{5} M_K + 4m} \right) = a^2 \left( \frac{\frac{1}{5} M_K}{\frac{2}{5} M_K + 2m} + \frac{\frac{1}{5} 4m}{\frac{2}{5} M_K + 2m} \right) + b^2 \left( \frac{\frac{1}{5} M_K}{\frac{2}{5} M_K + 2m} + \frac{\frac{1}{5} 4m}{\frac{2}{5} M_K + 2m} \right)$$

$$b^2 \cdot \left( \frac{2}{5} M_K + \frac{2}{5} 4m \right) \cdot \left( \frac{2}{5} M_K + 2m \right) = (a^2 + b^2) \cdot \left( \frac{1}{5} M_K + \frac{1}{5} 4m \right) \cdot \left( \frac{2}{5} M_K + 4m \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 \cdot \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \cancel{(M_K + 4m)} \cdot \left( \frac{2}{5} M_K + 2m \right) = (a^2 + b^2) \cdot \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \cancel{(M_K + 4m)} \cdot \left( \frac{2}{5} M_K + 4m \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2b^2 \left( \frac{2}{5} M_K + 2m \right) = (a^2 + b^2) \left( \frac{2}{5} M_K + 4m \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 \frac{2}{5} M_K + \cancel{b^2 2m} + \cancel{b^2 \frac{2}{5} M_K} + \cancel{b^2 2m} = a^2 \frac{2}{5} M_K + a^2 4m + \cancel{b^2 \frac{2}{5} M_K} + \cancel{b^2 4m}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 \frac{2}{5} M_K = a^2 \frac{2}{5} M_K + a^2 4m$$

$$\Leftrightarrow \quad (b^2 - a^2) \cdot \frac{2}{5} M_K = a^2 \cdot 4m \quad \Leftrightarrow \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{10} M_K = m$$

$$R = \pm\sqrt{b^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \quad \frac{M_k + 4m}{\frac{2}{5}M_k + 4m}}$$

$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{M_k + \frac{4}{10}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \cdot M_k}{\frac{2}{5}M_k + \frac{4}{10}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) M_k}}$$

$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}{\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}}$$

$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}{2 + 2\left(b^2/a^2 - 1\right)}}$$

$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2 + 2\frac{b^2}{a^2}}{2\, b^2/a^2}}$$

$$= \pm b \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{b^2/a^2}}$$

$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}$$

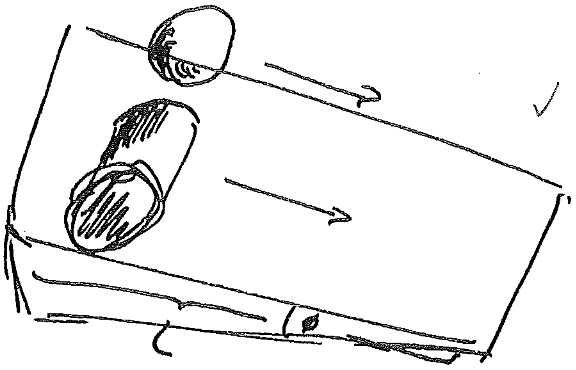
$$= \pm b \cdot \sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}$$

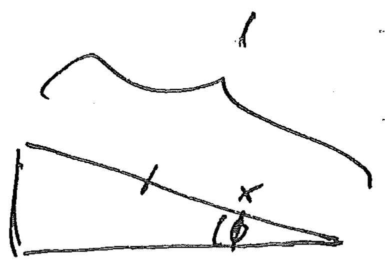
Bis auf Rechenfehler richtig.

3,5/4

3.

a)





✓

$$\mathcal{L}_{Zyl} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_Z \omega^2 \mp Mg\,x\sin\phi$$ (✓)

(Körper rollen nach unten.)

Es gilt: $\frac{2\pi R}{T} = \dot{x}$ ; $\frac{2\pi}{T} = \omega \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{R}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{Zyl} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_Z \frac{\dot{x}^2}{R^2} \mp Mg\,x\sin\phi$$

$$\mathcal{L}_{Kug} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_K \frac{\dot{x}^2}{R^2} \mp Mg\,x\sin\phi$$

~~b) $I_{Kug} = \frac{2}{5}MR^2$ (siehe Aufgabe 2)~~

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + I_{(Z,K)}\frac{\dot{x}}{R^2}\right) + Mg\sin\phi = 0$$

(✓)

$$\Rightarrow M\ddot{x} + \frac{I_{(Z,K)}}{R^2}\ddot{x} + Mg\sin\phi = 0 \Rightarrow \ddot{x}\left(M + \frac{I_{(Z,K)}}{R^2}\right) = \mp Mg\sin\phi$$

2 ~~1,5~~ /2

b) $I_{Kugel} = \frac{2}{5}MR^2$ ✓ (siehe Aufgabe 2)

$I_{Zylinder}$: $I = \int_V dV\,\rho(\vec{r})\cdot r_\perp^2 = \rho\int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\,dr\,r\,d\varphi\,dz$ $\quad \rho\pi R^2 H = M$

✓

2/2 $\qquad = 2\pi H\rho\int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi R^4\cdot H\rho = \frac{1}{2}MR^2$

c) Kugel: $\ddot{x} \cdot \left(M + \frac{2}{5}M\right) = +Mg\sin\phi$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = +\frac{5}{7} g \sin\phi$$

$$\Rightarrow \dot{x} = +\frac{5}{7} g \sin\phi \cdot t + V_0$$

$$\Rightarrow x = +\frac{5}{14} g \sin\phi \, t^2 + V_0 t + x_0 \quad (\checkmark)$$

$V_0 \equiv 0$ ✓ ~~$V_0 x_0 \equiv 0$~~ $\Rightarrow \quad x = 0 = -\frac{5}{14} g \sin\phi \, t^2 + l$ ✓

$x_0 \equiv l$

↑

Ok, wenn du $x_0$ so wählst passen deine Vorzeichen.

$$\Rightarrow \quad l = \frac{5}{14} g \sin\phi \, t^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{14 l}{5 g \sin\phi}} \quad \checkmark$$

Zylinder: $\ddot{x}\left(M + \frac{1}{2}M\right) = -Mg\sin\phi$ ✓

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{2}{3} g \sin\phi$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{2}{3} g \sin\phi \cdot t + V_0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3} g \sin\phi \, t^2 + V_0 t + x_0 \quad \checkmark$$

$V_0 \equiv 0, \quad x_0 \equiv l \quad \Rightarrow$

$$l = \frac{1}{3} g \sin\phi \, t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{3l}{g\sin\phi}} \quad \checkmark$$

2/2

* $x = 0$: $l = \frac{1}{2} g t^2 \sin\phi$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\phi}}$ ✓

Feststellen, dass $t$ für ausgedehnte Lösungen größer $\Leftarrow$ Rotationsträgheit! ✓

2/2

d) Punktmasse: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx\sin\phi$

(Rotation gibts hier nicht) ✓

$\Rightarrow I = 0$

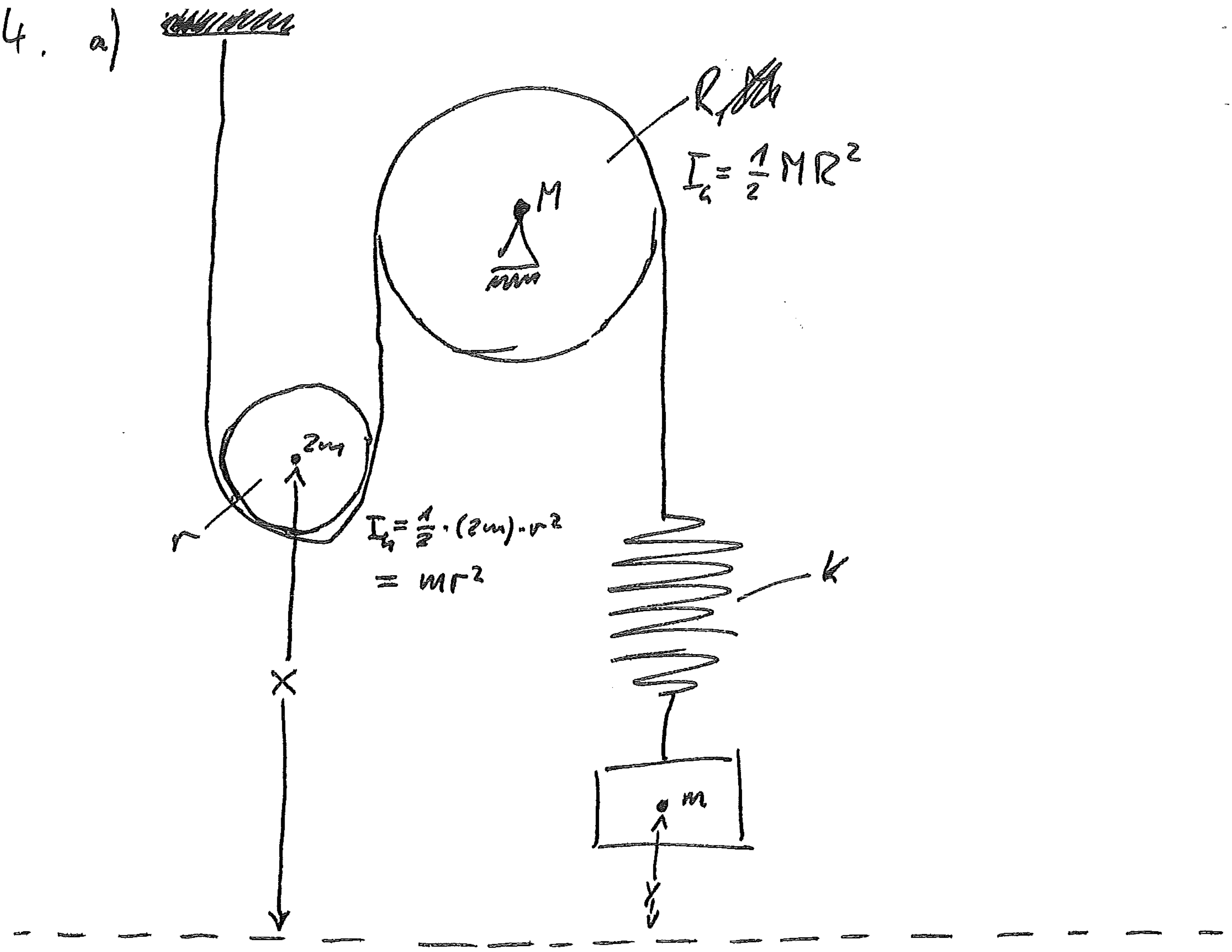
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + mg\sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -g\sin\phi \quad \Rightarrow$$

$V_0 = 0, x_0 \equiv l$: $\dot{x} = -gt\sin\phi$

$x = l - \frac{1}{2} g t^2 \sin\phi$ *

4. a)




$$T_{\text{Klein Rolle}} = \frac{1}{2}\cdot 2m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot mr^2 \cdot \omega_K^2$$

wobei $\omega_K = \omega_K(\dot{x})$ irgendwie zusammenhängt.

$$\frac{2\pi r}{T} = \dot{x} \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{r}$$

~~2x+2~~ ~~x~~

$$\rightsquigarrow T_K = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{r^2} = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 \checkmark$$

$$T_{\text{Grosse Rolle}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2} R^2 \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{4} M\dot{x}^2$$

$\omega_{\text{Große Rolle}} = \frac{2\dot{x}}{R}$

$$T_{Box} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$V_K = 2mg\,x$ ✓ $\quad V_G = 0$ ✓ $\quad V_{Box} = mg\,y + \frac{k}{2}\left((2x+y) - (2\underline{x} + \underline{y})\right)$ ✓

wobei $\underline{x} := x(0)$
$\underline{y} := y(0)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \cancel{\frac{1}{4}} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$
$$-2mgx - mgy - \frac{k}{2}\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)^2$$

$\underline{x} := x(0)$

$\underline{y} := y(0)$

$$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \cancel{\frac{1}{4}} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$
$$-(2x+y)mg - \frac{k}{2}\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)^2 \quad (\checkmark)$$

---

ELG:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad (\mathrm{II})$$

(I): ..
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} + \frac{1}{2}M\dot{x} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 3m\ddot{x} + \frac{1}{2}M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2mg - \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)^2$$

$$= -2mg - \frac{k}{2}\cdot 2\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)\cdot 2$$
$$= -2mg - 2k\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)$$

$$\Rightarrow (\mathrm{I}) \Leftrightarrow 3m\ddot{x} + 2\cancel{\frac{1}{2}}M\ddot{x} + 2mg + 2k\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right) \overset{(\checkmark)}{=} 0$$

(II): ...
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -mg - k\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{II}} \Leftrightarrow m\ddot{y} + mg + k\left((2x+y)-(2\underline{x}+\underline{y})\right) = 0 \ \checkmark$$

3,5/4

b) $x \to x + \frac{1}{2}\delta$ ; $y \to y - \delta$

$\dot{x} \to \dot{x}$ ; $\dot{y} \to \dot{y}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x + \frac{1}{2}\delta, y - \delta, \dot{x}, \dot{y}) =$

$$\frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$
$$- (2x + \delta + y - \delta) mg - \frac{k}{2}\left((2x+\delta+y-\delta) - (2\underline{x}+\delta+\underline{y}-\delta)\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$
$$- (2x + y) mg - \frac{k}{2}\left((2x+y) - (2\underline{x}+\underline{y})\right)^2$$

$$= \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$ ✓ "□"

---

~~$\mathcal{L}(x + \frac{1}{2}\delta, y - \delta, \dot{x}, \dot{y}) - \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$~~

~~$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2}\delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \cdot (-\delta)$~~ $\quad x + \frac{1}{2}\underset{\uparrow \varepsilon}{\delta}$ ; $y + (-1)\cdot\delta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \cdot 1 - \underset{0}{f}\right) = 0$$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} 3m\dot{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} M\dot{x} - m\dot{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m\dot{x} + \frac{1}{4} M\dot{x} - m\dot{y} = \text{const.}$$ ✓

(2)/2

c) $\dot{x} = 0$

$\dot{y} = 0$

$x(0) - x_0 = \Delta$

$2(y(0) - y_0) = \Delta$

$$\frac{3}{2} m\ddot{x} + \frac{1}{4} M\ddot{x} - m\ddot{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} m\ddot{x} + \frac{1}{4} M\ddot{x} = m\ddot{y}$$

(I): $\frac{3}{2} m\ddot{x} + \frac{1}{4} M\ddot{x} + mg + k\left((2x+y) - (2\underline{x} + \underline{y})\right) = 0$ ✓

(II): $m\ddot{y} + mg + k\left((2x+y) - (2\underline{x} + \underline{y})\right) = 0$ ✓

$$\ddot{y} = -g - \frac{k}{m}\left(\left[2(x - x(0)) + (y - y(0))\right]\right)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \cdot 2x + \frac{k}{m} \cdot 2x(0) - \frac{k}{m} \cdot y + \frac{k}{m} \cdot y(0) - g$$

$$= -\frac{k}{m} \cdot y + C_y \quad \text{mit} \quad C_y = -\frac{k}{m} 2(x - x(0)) + \frac{k}{m} y(0) - g$$

Das ist keine Konstante : $x = x(t)$ !

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{k}{m} y = C_y$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + \frac{m}{k} \cdot C_y \qquad f$$

$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 2(x - x(0)) + y(0) - \frac{mg}{k}$$

$$y(0) = C_1 - 2\left(x(0) - x(0)\right) + y(0) - \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{mg}{k}$$

$$\dot{y}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 2\dot{x}(t)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \cancel{\sqrt{\frac{m}{k}}}\, \frac{mg}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 2\left(x(t) - x(0)\right) + y(0) - \frac{mg}{k}$$

$$y(0) - y_0 = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow y(0) = \frac{\Delta}{2} + y_0$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{mg}{k} \cancel{\sqrt{\frac{m}{k}}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 1\right) - 2\left(x(t) - x(0)\right) + \frac{\Delta}{2} + y_0$$

$$y(t) = \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 1\right] - 2\left(x(t) - x(0)\right) + \frac{\Delta}{2} + y_0 \quad f$$

---

$$\cancel{y(t) - x(0) = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - 1\right) - 2\left(x(t) - x(0)\right)}$$

$$\cancel{x(t) - x(0) = g\frac{m}{2k}\left(\cos\right.}$$

$$\ddot{x} = \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{3}{2}m + \frac{1}{4}M}\right)}_{=:\mu} \cdot \left(-mg - k\left(\left[2(x(t) - x(0)) + (y(t) - y(0))\right]\right)\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\mu mg - 2\mu k x(t) + 2\mu k x(0) - \mu k\,(y(t) - y(0))$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\mu k\, x(t) = \underbrace{-\mu mg + 2\mu k x(0) - \mu k\,(y(t) - y(0))}_{=: C_x}$$

↳ selber Fehler : $y(t) \neq const$

$$\rightsquigarrow$$

$$x(t) = \tilde{C}_1 \cos\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right)$$

$$+ \frac{C_x}{2\mu k}$$

$$= \tilde{C}_1 \cos\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right)$$

$$- \frac{mg}{2k} + x(0) - \frac{1}{2}\left(y(t) - y(0)\right)$$

$$x(0) = \tilde{C}_1 - \frac{mg}{2k} + x(0)$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1 = \frac{mg}{2k}$$

$$\dot{x}(t) = -\tilde{C}_1 \sqrt{2\mu k}\, \sin\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right) + \tilde{C}_2 \sqrt{2\mu k}\, \cos\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right) - \frac{1}{2}\dot{y}(t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mg}{2k}\left(\cos\left(\sqrt{2\mu k}\, t\right) - 1\right) + \Delta + x_0 - \frac{1}{2}\left(y(t) - y(0)\right)$$

f

$$y(t)-y(0) = \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-1\right] - 2\left(x(t)-x(0)\right)$$

$$x(t)-x(0) = \frac{1}{2}\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)-1\right] - \frac{1}{2}\left(y(t)-y(0)\right)$$

---

$$\Rightarrow \quad y(t)-y(0) = \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-1\right] - \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)-1\right] + \left(y(t)-y(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(y(t)-y(0)\right) = \frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 2\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)\right] + 2y(0)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-1\right]}$$

$$y(t) = 2\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)\right] + \Delta + 2y_0 \quad f$$

---

$$x(t)-x(0) = \frac{1}{2}\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)-1\right] - \frac{1}{2}\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)-1\right] + \left(x(t)-x(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t)-x(0) = \frac{1}{4}\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{4}\frac{mg}{k}\left[\cos\left(\sqrt{2\mu k}\,t\right)-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right] + \Delta + x_0 \quad f$$

(mit $\mu = \frac{1}{\frac{3}{2}m+\frac{1}{4}M}$ )