ANALYTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK
Prof. Arthur HEBECKER
S. Kraus & C. Mayrhofer

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2012

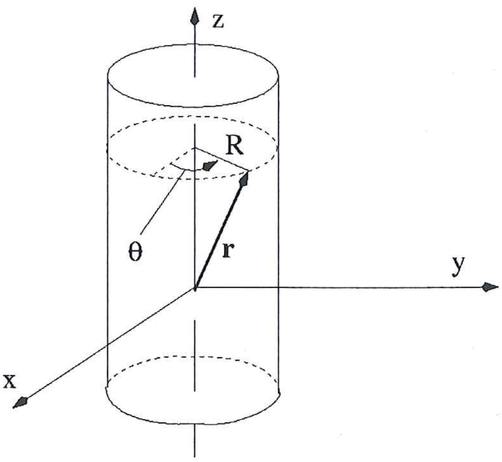
Jannis Andrija Schnitzer
Gruppe 15 / Mo 16
Tutor: Jenny Schober

# 4. ÜBUNGSBLATT

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 8 | 5 | 9,5 | 32,5 |

Die schriftlichen Aufgaben sind am 14.05.2012 in den Tutorien abzugeben.

**Aufgabe 4.1** (12 Punkte):
Ein Teilchen der Masse $m$ bewege sich reibungsfrei auf der Oberfläche eines (unendlich) langen Zylinders. Dieser Zylindermantel sei beschrieben durch $x^2+y^2 = R^2$, wobei $R$ den Zylinderradius bezeichnet; die $z$-Achse entspreche der Zylinderachse. Auf das Teilchen wirke eine Kraft, die zum Ursprung des Koordinatensystems zeigt und proportional zur Entfernung des Teilchens vom Ursprung ist, $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r}$.




a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion mit $z$ und dem azimutalen Winkel $\theta$ als generalisierte Koordinaten, $\tan\theta = x/y$, und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

b) Zeigen Sie, dass der Symmetrietransformation $\theta \to \theta + \alpha$ mit beliebigem Winkel $\alpha$ eine Erhaltungsgröße entspricht.

c) Prüfen Sie für eine gegebene Lösung $z(t)$ nach, dass die transformierte Lösung

$$\tilde{z}(t) = z(t) + \alpha\cos(\omega\, t), \quad \omega^2 := \frac{k}{m}$$

mit Parameter $\alpha$ wieder eine Lösung der Bewegungsgleichung für $z$ ist. Benutzen Sie das Noether-Theorem um die zugehörige Erhaltungsgröße dieser Symmetrietransformation zu bestimmen.

**Aufgabe 4.2** (8 Punkte):
Ein Mann kommt von einer Dienstreise nach Hause. Seine Frau bemerkt sofort, dass sein neuer Koffer zerkratzt ist. Er rechtfertigt sich mit einer haarsträubenden Geschichte: Am Flughafen sei, als sein Koffer bei der Gepäckausgabe auf dem Laufband gefahren kam, eine Katze von der Seite daraufgesprungen und habe beim "Bremsen" Kratzspuren hinterlassen. Seine Frau weist dies mit dem Argument zurück, dass die Kratzspuren ja in diesem Fall offensichtlich gekrümmt sein müssten, sie aber gerade seien.

Ist das Misstrauen der Ehefrau begründet? Geben Sie ein überzeugendes qualitatives Argument. Berechnen Sie Form und Länge der zu erwartenden Kratzspuren. Geben Sie sich die relevanten physikalischen Parameter, etwa Geschwindigkeitsvektor etc., selbst vor.

*Hinweis:* Reibungskräfte wirken immer entgegen der relativen Bewegungsrichtung der sich berührenden Körper.

**Aufgabe 4.3** (10 Punkte):
Gegeben seien drei Massenpunkte: $m_1 = 4\,m$ bei $\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0)^T$, $m_2 = m$ bei $\mathbf{r}_2 = (0, 2a, 4a)^T$ und $m_3 = m$ bei $\mathbf{r}_3 = (0, 4a, 2a)^T$, welche durch masselose Stangen starr miteinander verbunden sind.

a) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie den zugehörigen Trägheitstensor bezüglich des *Ursprungs.*

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und die Hauptachsen $\mathbf{e}_i$.

c) Wie groß ist das Trägheitsmoment, wenn sich das System um eine Achse durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\mathbf{x} = (0, 1, 1)^T$ dreht?

d) Wie groß ist das Trägheitsmoment für eine Drehung um die Achse parallel zur $z$-Achse, die durch den Schwerpunkt des Systems verläuft?

**Aufgabe 4.4** (10 Punkte):
Betrachten Sie einen Würfel mit homogener Massendichte $\rho$ und Kantenlänge $a$.

a) Berechnen Sie nochmals den Trägheitstensor des Würfels bezüglich seines Schwerpunktes (siehe Vorlesung).

b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Würfels für Rotationen um eine Achse, welche durch den Mittelpunkt und eine Ecke des Würfels geht.

c) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Würfels für Rotationen um eine Würfelkante.

d) Betrachten Sie nun den inhomogenen Fall. Die Massendichte sei nun

$$\rho(\mathbf{x}) = |\rho_x \tfrac{x}{a}| + |\rho_y \tfrac{y}{a}| + |\rho_z \tfrac{z}{a}| \qquad \text{mit} \qquad \rho_x, \rho_y, \rho_z \in \mathbb{R}_+ \,,$$

der Koordinatenursprung sei im Würfelmittelpunkt mit Achsen parallel zu den Würfelkanten. Berechnen Sie nun für diese Anordnung den Trägheitstensor bezüglich des Mittelpunkts bzw. Schwerpunkts.
*Hinweis*: Benützen Sie für die Auswertung der Integrale, dass $\rho(\mathbf{x})$ die Summe dreier Terme ist, die durch die Symmetrien des Würfels ineinander übergeführt werden können (bis auf Redefinitionen der $\rho_i$). Daher ist es ausreichend die Integrale für einen Trägheitstensor mit z.B. $|\rho_x \frac{x}{a}|$ zu berechnen, da die beiden fehlenden Summanden anschließend durch die Symmetrien erhalten werden können. Weiters beachten Sie, dass Integrale für ungerade Funktionen über symmetrische Intervalle verschwinden.

Theoretische Physik I, 4. Übungsblatt

4.1. a) Verallgemeinerte Koordinaten $z, \theta$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} R\dot\theta\cos\theta \\ R\dot\theta\sin\theta \\ \dot z \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \left(R^2\dot\theta^2 + \dot z^2\right)$$

$V = \ldots$

$$F = -\vec\nabla V \Rightarrow k\vec r = \begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int V = k\int x\,dx \text{ etc.} \Rightarrow \tilde V = \frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) + \underbrace{C}_{\text{Wähle } =0} = \frac{k}{2}\vec r^2 \;✓$$

$$= \frac{k}{2}\left(R^2 + z^2\right) ✓ \Rightarrow V = \frac{k}{2} z^2 \quad (\text{da } R = \text{const.})$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m\left(R^2\dot\theta^2 + \dot z^2\right) - \frac{1}{2}kz^2 = \frac{m}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\dot z^2 - \frac{k}{2}z^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} mR^2\dot\theta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} m\dot z + kz = 0 \Leftrightarrow m\ddot z = -kz \;✓$$

$$\Leftrightarrow mR^2\ddot\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot\theta = 0 \;✓$$

3/3

4/4

b) $\theta$ ist zyklische Koordinate ✓ $\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}(\theta + \alpha) = \frac{d}{dt}\theta + \underbrace{\frac{d}{dt}\alpha}_{=0} = \dot\theta \Rightarrow \text{Invarianz der BGL}$$

Erhaltungsgrösse $p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = mR^2\dot\theta$ ✓

3/3

c) Bilde $\dot{\tilde z}, \ddot{\tilde z}$:

$$\dot{\tilde z} = \dot z(t) - \alpha\omega\sin(\omega t)$$

$$\ddot{\tilde z} = \ddot z(t) - \alpha\omega^2\cos(\omega t)$$
$$= \ddot z(t) - \alpha \tfrac{k}{m}\cos(\omega t) \;✓$$

Bewegl.: $m\ddot z = -kz$

Setze $\tilde z, \ddot{\tilde z}$ ein: $\quad m\ddot z - \alpha k\cos\omega t = -kz - \alpha k\cos\omega t$

$$\Leftrightarrow m\ddot z = -kz \;✓$$

Bilde nun $L(\dot\theta, \tilde z, \dot{\tilde z}) = L(\dot\theta, z + \alpha\cos\omega t, \dot z - \alpha\sin\omega t)$

$$= \frac{m}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\dot{\tilde z}^2 - \frac{k}{2}\tilde z^2$$

$$= \frac{m}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\left(\dot z(t) - \alpha\omega\sin(\omega t)\right)^2 - \frac{k}{2}\left(z(t) + \alpha\cos(\omega t)\right)^2$$

$$= \underline{\frac{m}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\dot z(t)^2} - m\dot z\alpha\omega\sin(\omega t) + \frac{m}{2}\alpha^2\omega^2\sin^2(\omega t)$$
$$\underline{-\frac{k}{2}z^2(t)} - k\alpha z\cos(\omega t) - \alpha^2\frac{k}{2}\cos^2(\omega t)$$

$$= L - m\dot z(t)\alpha\omega\sin(\omega t) + \frac{k}{2}\alpha^2\sin^2(\omega t)$$
$$- k\alpha z(t)\cos(\omega t) - \frac{k}{2}\alpha^2\cos^2(\omega t)$$

$$= L - m\alpha\omega\,\dot z(t)\sin(\omega t) - k\alpha\, z(t)\cos(\omega t)$$
$$+ \frac{k}{2}\alpha^2\sin^2(\omega t) + \frac{k}{2}\alpha^2\cos^2(\omega t) - k\alpha^2\cos^2(\omega t)$$

$$= L - m\alpha\omega\,\dot z(t)\sin(\omega t) - k\alpha z(t)\cos(\omega t) + \frac{k}{2}\alpha^2 - k\alpha^2\cos^2(\omega t)$$

$$= L - \alpha\Big(\underbrace{m\omega\dot z(t)\sin(\omega t) - k\cancel{\alpha}\, z(t)\cos(\omega t)}_{\frac{d}{dt}(-m\dot z\cos(\omega t))} + \underbrace{\frac{k\alpha}{2}}_{\frac{d}{dt}\frac{k\alpha}{2}t} - \underbrace{k\alpha\cos^2(\omega t)}_{-\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha k}{2}t + \frac{\alpha k}{4\omega}\sin(2\omega t)\right)}\Big)$$

$$= L - \alpha\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{-m\dot z\cos(\omega t) + \frac{k\alpha}{2}t - \frac{k\alpha}{2}t - \frac{\alpha k}{2}\cdot\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)}_{=:f}\Big)$$

Da hast du dich irgendwo verrechnet...

$$= L + \alpha\frac{d}{dt}(-f)$$

Nach Noether: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot z}\cdot\cos(\omega t) + f\right) = 0$ (Vorsicht Vorzeichen von $f$)

$$\frac{\partial L}{\partial\dot z}\cos(\omega t) + f = m\dot z\cos(\omega t) - m\dot z\cos(\omega t) + -\frac{k\alpha}{2}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{k\alpha}{2\omega}\left(-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{k\alpha}{2\omega}\left(-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right) = \frac{k\alpha}{2\omega}\left(\omega\sin^2(\omega t) - \omega\cos^2(\omega t)\right)$$

3/4,5

$$= \frac{k\alpha}{2}\left(\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)\right)$$

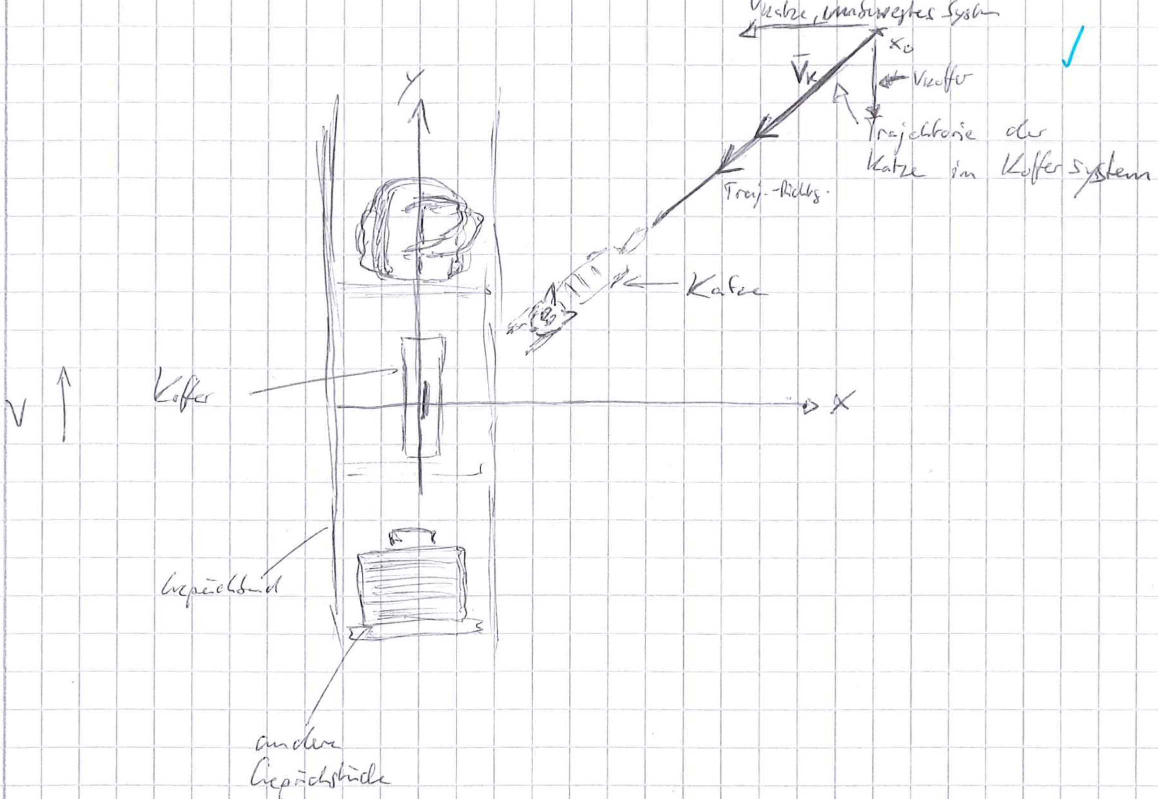
$$= \frac{k\alpha}{2} - k\alpha\cos^2(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k\alpha}{2} = k\alpha\cos^2(\omega t) \Rightarrow \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}$$

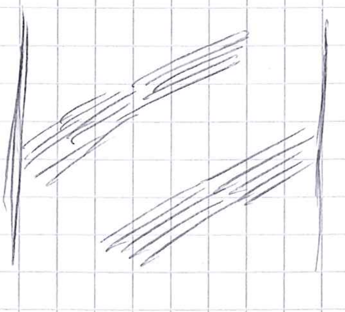
$$\Rightarrow \frac{1}{\omega}\arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = t \quad (?)$$

4.2 Wir betrachten das Bezugssystem, das am Koffer fixiert ist. Aus der Sicht dieses Systems, das nach Newton ein Inertialsystem ist*, beschreibt die vom ruhenden Betrachter aus orthogonal zum Band springende Katze im Koffersystem die folgende Trajektorie:

* da das Gepäckband mit v=const transportiert




D.h. vom Koffersystem aus ist die Bewegung geradlinig & gleichförmig, bis der Koffer erreicht wird, also Reibung einsetzt.
Dann aber wird die glf. geradlinige Bew. nur durch die ihr parallel entgegenwirkenden Reibungskräfte (bzw. Kratzkräfte) gebremst. Die Kratzspuren sind daher nicht parallel zur Kofferkante, aber gerade, etwa so:



Unter den Annahmen $m_{Katze} = 5\,kg$,

$$\vec{v}_{Katze} = \begin{pmatrix} -2\,\frac{m}{s} \\ -0{,}5\,\frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

(siehe Skizze: Absprunggeschw. der Katze in x, Koffergeschw. in y-Richtg.)

Reibungskoeff.: $\eta = 0{,}8$ (Kratzreibung ist stark!)

ergibt sich (Katze treffe im Nullpkt. auf) das folgende 1-dim. Problem:

$$x_{Katze}(0) = 0$$

$$\dot{x}_{Katze}(t) = \ldots - \eta \cdot \frac{\underbrace{|F_n|}_{\text{Reibungskraft}}}{m_{Katze}} = \ldots - \eta \frac{m_{Katze}}{m} g$$

Reibungskraft (Quelle: PEP I)

$$\dot{x}_{Katze}(t) = |\vec{v}| - \eta m_{Katze} g t$$

$$x_{Katze}(t) = |\vec{v}| t - \frac{1}{2} \eta m_{Katze} g t^2$$

Gesucht: $x(t_0)$ wobei $\dot{x}(t_0) = 0$

$$\dot{x}(t_0) = 0 \iff |\vec{v}| = \eta m_{Katze} g t_0$$

$$\iff t_0 = \frac{|\vec{v}|}{\eta m_{Katze} g} = \frac{\sqrt{2^2 + 0,5^2}}{0,8 \cdot 5 \cdot 9,81} s =$$

$$\ddot{x}_{Katze}(t) = -\frac{F_{Katze}}{m}$$

mit $\dot{x}_{Katze}(0) = |\vec{v}_{Katze}|$

$x_{Katze}(0) = 0$

$$\Rightarrow \int \ddot{x}(t)\,dt = -\int \frac{F_{Katze}}{m}\,dt = -\int \frac{\eta F_N}{m}\,dt = -\int \frac{\eta m g}{m}\,dt = -\eta g t + C$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = |\vec{v}_{Katze}| - \eta g t$$

$$\int \dot{x}(t)\,dt = \int |\vec{v}_{Katze}|\,dt - \int \eta g t\,dt = |\vec{v}_{Katze}| t - \frac{1}{2} \eta g t^2 = x(t)$$

(Konstante wird 0 wg. Anf.-bed.)

Suche $x(t_0)$ wo $v(t_0) = 0$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \eta g t_0 \iff t_0 = \frac{|\vec{v}|}{\eta g}$$

$$\Rightarrow x(t_0) = \frac{|\vec{v}_{Katze}|^2}{\eta g} - \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_{Katze}|^2}{\eta g} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{v}_{Katze}|^2}{\eta g}$$ ✓

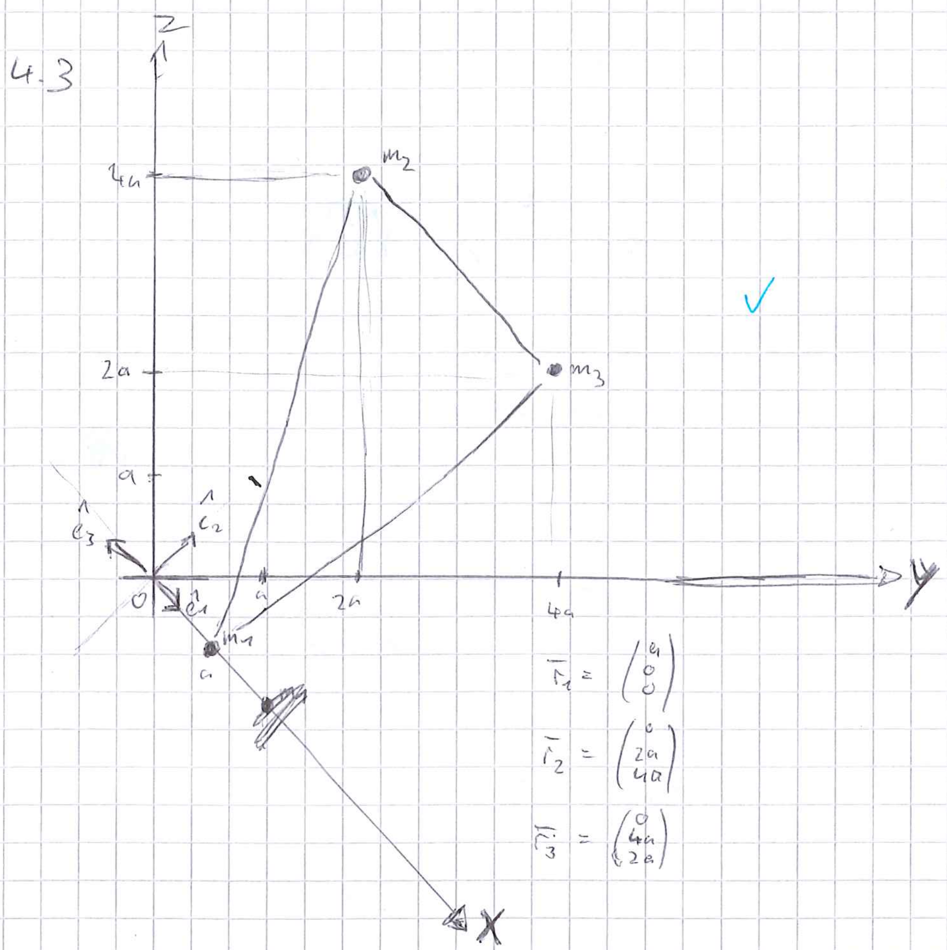
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 + 0,25^2}{0,8 \cdot 9,81} m = 0,26\,m$$

= Länge der Kratzspuren (jedes einzelnen Photo)

8/8

Das Misstrauen der Ehefrau ist daher unbegründet. Im Allgemeinen gilt ~~[illegible]~~ bei Misstrauen in Beziehungen jedoch, dass dieses unabhängig von seiner Ursache am besten im Gespräch aufgelöst werden sollte und eine stabile, ehrliche Beziehung keine Gründe für Misstrauen zulassen sollte. □

4.3




✓

$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 4a \end{pmatrix}$

$\bar{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4a \\ 2a \end{pmatrix}$

$$I_0^{ij} = 4m\left(\delta^{ij}\bar{r}_1^{\,2} - r_1^i r_1^j\right) + m\left(\delta^{ij}\bar{r}_2 + r_2^i r_2^j\right) + m\left(\delta^{ij}\bar{r}_3^{\,2} + r_3^i r_3^j\right)$$

$$\Rightarrow I_0 = \begin{pmatrix} 4ma^2 + 20ma^2 + 20ma^2 - 4ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 44ma^2 - 4ma^2 - 16ma^2 & -16ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 44ma^2 - 16ma^2 - 4ma^2 \end{pmatrix}$$

$$= ma^2 \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & -16 \\ 0 & -16 & 24 \end{pmatrix} \cancel{ma^2}$$ ✓

2/2

b). Bestimme Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix.

Die EV zeigen in Richtung der Hauptträgheitsachsen und die EW sind die Hauptträgheitsmomente.

(CAS) $\rightsquigarrow$ $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ +1 \end{pmatrix}$ ✓ 1,5/3

EW: $I_1 = 40ma_2$ $\quad I_2 = 40ma_2$ $\quad I_3 = 8ma_3$ ✓ Rechnung?

c) ~~$(0,1,1)^T$ ist ein Hauptachse, also ist $I_{\text{alt}} = I_3 = 8ma^2$~~

0 12

d) Schwerpunkt: $\vec r_S = \frac{1}{6m}\left(4m\vec r_1 + m\vec r_2 + m\vec r_3\right)$

$$= \frac{1}{6m}\left(\begin{pmatrix}4ma\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2ma\\4ma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4ma\\2ma\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{3}a\\ a\\ a\end{pmatrix} \checkmark$$

Abstand der Hauptträgheitsachse $\hat e_3$ durch den Schwerpunkt zu der durch den Ursprung: $|\frac{1}{\sqrt2} a\hat e_3 - \vec r_S| = \frac{2}{3}a$ $\sqrt{\frac{13}{9}}a$

⇒ Satz von Steiner:

$$I_{0,(011)} = 6m\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + 8ma^2$$

$$= 6m\cdot\frac{4}{9}a^2 + 8ma^2$$

1.5 13

$$= \left(\frac{24}{9}+8\right)ma^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}+\frac{24}{3}\right)ma^2 = \frac{32}{3}ma^2$$

f) ~~Betrachte $I_z$ ... durch den~~

Wir betrachten das Schwerpunkts-Hauptachsenkoordinatensystem.

D. h. die 1-Achse wird $\hat e_1$, die 2-Achse $\hat e_2$ und die 3-Achse $\hat e_3$. (Das ist glaub nicht rechtshändig, macht aber nichts!)

Der Trägheitstensor ist bekannt: $I_S = ma^2\begin{pmatrix}40&0&0\\0&40&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

Die Achse parallel zur alten z-Achse ist im neuen Koordinatensystem $\hat e_z = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Es gilt: $I_z = I_S^{ij} e_z^i e_z^j = \frac{1}{\sqrt2}\left(I^{2j}e_z^j + I^{3j}e_z^j\right) = \frac{1}{2}\left(I^{22}+I^{23}+I^{32}+I^{33}\right)$ ✓

$= 24ma^2$

4.4. a) $I^{ij} = \int d^3r\, \rho(\vec r)\left(\delta^{ij} r^2 - r^i r^j\right)$ ✓

$$= \int d^3r\, \rho(\vec r)\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} dx\,dy\,dz\, \rho(\vec r)\begin{pmatrix}y^2+z^2 & -xy & -xz\\ -xy & x^2+z^2 & -yz\\ -xz & -yz & x^2+y^2\end{pmatrix}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \left[x\cdot(y^2+z^2)\right]_{-a/2}^{a/2} dy\,dz$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} ay^2+az^2 \, dy\,dz = \int_{-a/2}^{a/2} \left[a\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} + \left[a z^2 y\right]_{-a/2}^{a/2} dz$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} a\cdot\frac{a^3}{12} + a^2z^2 \, dz = \left[\frac{a^4}{12}z\right]_{-a/2}^{a/2} + \left[a^2\frac{z^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$= \frac{a^5}{12} + \frac{a^5}{12} = \frac{a^5}{6}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} -xy \, dx\,dy\,dz = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \left[-\frac{1}{2}x^2\cdot y\right]_{-a/2}^{a/2} dy\,dz$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} 0 \, dy\,dz = 0$$

Aus Symmetriegründen: $$I^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\rho a^5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}\rho a^5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\rho a^5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \frac{1}{6}Ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

3/3

(b) $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ✓ $\Rightarrow$ Gesuchtes $\tilde{I} = I^{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j$

$= \frac{1}{2}Ma^2$ → $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vergessen?

0,5 / 1

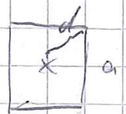
(c) Neues Trägheitsmoment durch Achse bei Rot. um Hauptträgheitsachse

$I_1 = \frac{1}{6}Ma^2$ ✓. Abstand Hauptträgheitsachse – Kante ist

$d = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ $\Rightarrow$ nach Steiner ist $I_{Kante} = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{6}Ma^2$ ✓

$= \frac{2}{3}Ma^2$ ✓

2/2



Betrag $|x|$ auseinanderziehen

(d) $$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \left|\rho_x\frac{x}{a}\right| x^2 \, dx\,dy\,dz = \left|\frac{\rho_x}{a}\right|\left(-\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{0} x^3\,dx\,dy\,dz + \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{0}^{a/2} x^3\,dx\,dy\,dz\right)$$

$|\rho_x| = \rho_x$

$|a| = a$

$$= \left|\frac{\rho_x}{a}\right|\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \frac{2}{4}\cdot\frac{a^4}{16}\,dy\,dz = \rho_x\cdot\frac{a^5}{32}$$

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \left|\rho_x\frac{x}{a}\right|\cdot y^2 \, dx\,dy\,dz = \frac{\rho_x}{a}\cdot\left(\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{0} -x\cdot y^2\,dx\,dy\,dz + \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{0}^{a/2} x\cdot y^2\,dx\,dy\,dz\right)$$

$$= \frac{\rho_x}{a}\left(2\cdot\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{4}\,y^2\,dy\,dz\right) = \frac{\rho_x\cdot a}{4}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} y^2\,dy\,dz = \frac{\rho_x\cdot a^4}{4\cdot 12}\cdot\int_{-a/2}^{a/2} dz$$

$$= \frac{\rho_x}{48}\cdot a^5$$

$$\Rightarrow \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\left|\rho_x\frac{x}{a}\right| + \left|\rho_y\frac{y}{a}\right| + \left|\rho_z\frac{z}{a}\right|\right)\cdot\left(y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$$

$$= a^5\cdot\left(\cancel{\rho_x}\,\frac{\rho_x}{48} + \frac{\rho_y}{32} + \frac{\rho_z}{48} + \frac{\rho_x}{48} + \frac{\rho_y}{48} + \frac{\rho_z}{32}\right)$$

$$= \frac{a^5}{16}\cdot\left(\frac{2\rho_x}{3} + \frac{\rho_y}{2} + \frac{\rho_y}{3} + \frac{\rho_z}{2} + \frac{\rho_z}{3}\right)$$

$$= \frac{a^5}{16}\left(\frac{4}{6}\rho_x + \frac{5}{6}\rho_y + \frac{5}{6}\rho_z\right)$$

$$= \frac{a^5}{96}\left(4\rho_x + 5\rho_y + 5\rho_z\right)$$ ⇝ Aus Symmetriegründen folgt der unten angegebene Trägheitstensor

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\left|\rho_x\frac{x}{a}\right| + \left|\rho_y\frac{y}{a}\right| + \rho_z\frac{z}{a}\right|\right)\cdot\left(-xy\right)dx\,dy\,dz = 0,$$

denn es ist in jedem Summanden ein Integral der Form $\int_{-\xi}^{\xi} t\,dt$ enthalten.

$$\Rightarrow I = \frac{a^5}{96}\begin{pmatrix} 4\rho_x+5\rho_y+5\rho_z & 0 & 0 \\ 0 & 5\rho_x+4\rho_y+5\rho_z & 0 \\ 0 & 0 & 5\rho_x+5\rho_y+4\rho_z \end{pmatrix}$$ ✓

4/4