ANALYTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK
Prof. Arthur HEBECKER
S. Kraus & C. Mayrhofer

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2012

Jannis Andrija SCHNITZER, Malika RENZ
Tutorin: Jenny SCHOBER, Mo16

3. ÜBUNGSBLATT

1	2	3	Σ
10	19	10	39

Die schriftlichen Aufgaben sind am 07.05.2012 in den Tutorien abzugeben.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte):
Betrachten Sie ein System aus N Massepunkten der Masse m_i, $i = 1, \ldots, N$ welches durch die Lagrange-Funktion

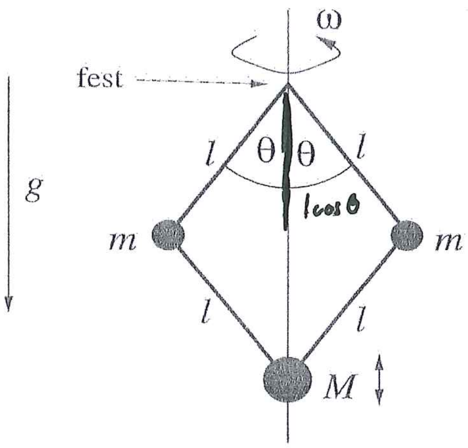
$$L \equiv T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum_{i<j} V\left(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\right)$$

beschrieben wird. $\mathbf{x}_i$ seien dabei kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$.

(a) Drücken Sie die Lagrange-Funktion durch die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q}_1 = \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{q}_{1i} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1$, $i = 2, \ldots, N$ aus. Gibt es eine zyklische Koordinate? Was ist die zugehörige Erhaltungsgröße?

(b) Führen Sie einen infinitesimalen Galilei-Boost $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i + \delta\mathbf{v}\, t$, $i = 1, \ldots, N$ durch und zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion invariant bis auf eine totale Zeitableitung ist. Was ist die zu dieser Symmetrie korrespondierende Erhaltungsgröße?

Aufgabe 3.2 (20 Punkte):
Betrachten Sie eine Anordnung bestehend aus zwei beweglich angebrachten Massestücken der Masse m, die aus der Vertikalen um einen Winkel θ ausgelenkt werden können, und einem Gegengewicht der Masse M, das sich nur vertikal bewegen kann. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben jeweils die Länge l. Die ganze Anordnung dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse. Betrachten Sie alle Massestücke als punktförmig.



(a) Wählen Sie θ als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L \equiv T - V$ auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel θ ab.

(c) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswinkel θ_0 als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω. (Im Gleichgewicht verschwinden die zeitlichen Ableitungen.) Bestimmen Sie daraus zusätzlich die minimale Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{min.}}$ bei der sich das Gegengewicht hebt.

(d) Die Terme in L quadratisch in den Zeitableitungen interpretieren Sie als "kinetische Energie" $\tilde{T}$. Der Rest gehört zur "potentiellen Energie" $\tilde{V}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für θ, dass $\tilde{T} + \tilde{V}$ zeitlich konstant ist.

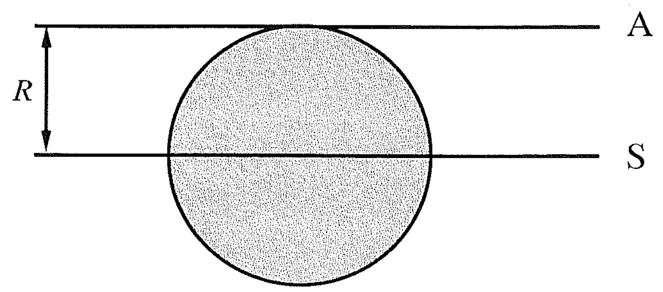
(e) Welche Symmetrie führt zu der in (d) identifizierten Erhaltungsgröße? Leiten Sie die Erhaltungsgröße (analog zur Vorlesung) explizit her.

(f) Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang verschiedene mögliche Definitionen der Energie.

(g) Diskutieren Sie das Potential $\tilde{V}$ sowie die dazugehörige Bewegung.

(h) Finden Sie $t \equiv t(\theta)$ als Integral.

Aufgabe 3.3 (10 Punkte):
Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_{A} einer Münze der Masse M mit Radius R um die Achse A, die tangential zur Münze verläuft. Berechnen Sie dazu zuerst das Trägheitsmoment I_{S} bezüglich der zu A parallelen Schwerpunktsachse S und benutzen Sie den Satz von Steiner.



Theoretische Physik II, 3. Übungsblatt.

Jannis A. Schnitzer
Malika Renz

3.1 (a) $L \equiv T - V = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - \sum_{i<j} V(|x_i - x_j|)$.

$q_1 = x_1 \qquad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$

$q_i = x_i - x_1 \qquad \dot{q}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_1$

Für $i > 1$: $q_i - q_j = x_i - x_1 - (x_j - x_1) = x_i - x_j$

$\dot{q}_i + \dot{q}_1 = \dot{x}_i - \dot{x}_1 + \dot{x}_1 = \dot{x}_i$

$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i + \dot{q}_1)^2$ ✓

$V = \underbrace{\sum_{i=2}^{N} V(|q_i|)}_{q_2 - q_1,\ q_3 - q_1, \dots} + \sum_{1<i<j} \underbrace{V(|q_i - q_j|)}_{q_3 - q_2,\ \dots,\ q_N - q_{N-1}}$ ✓

$\Rightarrow L = \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i + \dot{q}_1)^2 - \sum_{i=2}^{N} V(|q_i|) - \sum_{1<i<j} V(|q_i - q_j|)$ ✓

$\Rightarrow L = L(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$

$\Rightarrow q_1$ ist eine zyklische Koordinate. ✓

Damit gilt: (mit E-L-G) $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const.}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \frac{m_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i + \dot{q}_1)^2$

$= m_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=2}^{N} \partial_{\dot{q}_1} \frac{m_i}{2} (\dot{q}_i^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_i + \dot{q}_1^2)$

$= m_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=2}^{N} (m_i \dot{q}_i + m_i \dot{q}_1) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = \text{const.}$ ✓

5

b) $L(x_1, \dots, x_i + \delta v t, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_i + \delta v, \dots, \dot{x}_N, t) =$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i + \delta v)^2 - \sum_{i<j} V(|x_i + \cancel{\delta v t} - x_j - \cancel{\delta v t}|) =$

$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i \delta v}_{\text{Totale Zeitabl. von } f(x_i, t) = m_i x_i \delta v} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \delta v^2}_{\Rightarrow O(\delta v^2)} - V$ ✓ ✓

$\Rightarrow$ Nach dem Noether-Theorem gilt:

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \delta v t - \delta v m_i x_i \right) = 0. \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 = m_i \dot{x}_i$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgrösse $m_i \dot{x}_i t - m_i x_i$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i t - m_i x_i) = 0$

$\Rightarrow x_i - \dot{x}_i t = const$ ✓

(Procedur ist $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ durchführbar)

$\Rightarrow$ Analog zur Vorlesung: Geradlinig glf. Bew. d. Schwerpkts. ✓

5

3.2. (a) Kinetische Energien:

- Vert. Bew. von M: $T_M = \frac{M}{2} \cdot (2l\cos\Theta)^{\cdot 2}$
$= 2Ml^2 \sin^2\Theta \cdot \dot{\Theta}^2$ ✓

Skizze:
Wie kommst du auf die generalisierten Koordinaten?

- Vert. Bew. von m_1: $T_m = \frac{m}{2}(l\Theta)^{\cdot 2}$
$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\Theta}^2$ ✓

- Kreisbewegung von m_1: $T_\omega = \frac{m}{2}(\omega l \sin\Theta)^2$ ✓

Potentielle Energie:

- Gravitation wirkt auf M, m_1, m_2

$\Rightarrow V = -2 \cdot l \cdot g \cdot (M+m) \cdot \cos\Theta$ ✓

(Aus $-g \cdot M \cdot 2l\cos\Theta + 2 \cdot (-g \cdot m \cdot l\cos\Theta)$)

~~Ansatz~~

$\Rightarrow T = 2Ml^2 \sin^2\Theta \cdot \dot{\Theta}^2 + ml^2(\dot{\Theta}^2 + \omega^2 \sin^2\Theta)$ ✓

$V = -2lg(M+m)\cos\Theta$ ✓

2,5/3

(b) $L = 2Ml^2 \sin^2\Theta\, \dot{\Theta}^2 + ml^2(\dot{\Theta}^2 + \omega^2 \sin^2\Theta) + 2lg(M+m)\cos\Theta$ ✓

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = 4Ml^2 \dot{\Theta} \cdot \sin^2\Theta + 2ml^2\dot{\Theta}$ ✓

$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = 4Ml^2\dot{\Theta}^2 \sin\Theta\cos\Theta + 2ml^2\omega^2 \sin\Theta\cos\Theta - 2lg(M+m)\sin\Theta$ ✓

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = 4Ml^2\dot{\Theta}^2 \cdot 2 \cdot \sin\Theta\cos\Theta + 4Ml^2\ddot{\Theta}\sin^2\Theta + 2ml^2\ddot{\Theta}$

$\Rightarrow 4Ml^2\dot{\Theta}^2 \cdot 2\sin\Theta\cos\Theta + 4Ml^2\ddot{\Theta}\sin^2\Theta + 2ml^2\ddot{\Theta} - 4Ml^2\dot{\Theta}^2\sin\Theta\cos\Theta - 2ml^2\omega^2\sin\Theta\cos\Theta + 2lg(M+m)\cdot\sin\Theta = 0$

✓

$\Leftrightarrow 4Ml^2(\dot{\Theta}^2\sin\Theta\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin^2\Theta) + 2ml^2\ddot{\Theta} - 2ml^2\omega^2\sin\Theta\cos\Theta + 2lg(m+M)\sin\Theta = 0$

$\Leftrightarrow 2Ml\,(\dot\theta^2 \sin\theta\cos\theta + \ddot\theta\sin^2\theta) + ml\,(\ddot\theta - l\omega^2 \sin\theta\cos\theta + g(M+m)\sin\theta = 0 \quad (*)$ ✓

(c) $\dot\theta = 0,\ \ddot\theta = 0$ 3/3

$$\Rightarrow 2ml^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta = 2lg(M+m)\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow ml\omega^2\cos\theta = g(M+m)$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \arccos\left(\frac{(M+m)g}{ml\omega^2}\right) = \arccos\left(\frac{\left(\frac{M}{m}+1\right)g}{l\omega^2}\right)$$

Für ω_{min}: Setze $\theta_0 = 0$

$$\Rightarrow 1 = \frac{g(M/m+1)}{l\omega_{min}^2} \Rightarrow |\omega_{min}| = \sqrt{\frac{g}{l}\cdot\left(\frac{M}{m}+1\right)}$$

(d) $\tilde T = 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + ml^2\dot\theta^2$ ✓

$$\tilde V = -ml^2\omega^2\sin^2\theta - 2lg(M+m)\cos\theta \ ✓$$

$$\tilde T + \tilde V = 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + ml^2\dot\theta^2 - ml^2\omega^2\sin^2\theta - 2lg(M+m)\cos\theta$$

Bilde $\frac{d}{dt}\tilde T + \tilde V = \left(4Ml^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta\cdot\ddot\theta + 4Ml^2\dot\theta^3\sin\theta\cos\theta\right)$

$$+ 2ml^2\dot\theta\ddot\theta - 2ml^2\omega^2\dot\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$+ 2lg(M+m)\dot\theta\sin\theta$$

$$= 2l\dot\theta\,\underbrace{\left(2Ml\sin^2\theta\cdot\ddot\theta + 2Ml\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta + ml\ddot\theta - ml\omega^2\sin\theta\cos\theta + g(M+m)\sin\theta\right)}_{=(*)=0}\ ✓$$

$$= 0 \ ✓$$

3/3

(e) Aus Zeitumabl. von L: (da $L = L(\theta,\dot\theta)$)

$$\frac{d}{dt}L = \frac{\partial L}{\partial\theta}\cdot\dot\theta + \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\ddot\theta \underset{\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\ (ELG)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)\dot\theta + \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\frac{d}{dt}\dot\theta$$

(Rückwärts Produktregel) $= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}(L) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta\right) = 0$ ✓

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta - L\right)}_{\text{Erhaltungsgrösse}} = 0 \ ✓$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\cdot\dot\theta = 4Ml^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 + 2ml^2\dot\theta^2 \underset{\text{oh Wunder!}}{=} \tilde T$$

3/3

$$\tilde T - L = \tilde T - \left(2Ml^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2 + ml^2(\dot\theta + \omega^2\sin^2\theta) + 2lg(M+m)\cos\theta\right)$$

$$= 2Ml^2\sin^2\theta\cdot\dot\theta^2 + ml^2\dot\theta^2 - ml^2\omega^2\sin^2\theta - 2lg(M+m)\cos\theta \underset{\text{Oh Wunder!}}{=} \tilde T + \tilde V = E \ ✓$$

(f) Die Newton'sche Mechanik def. $E = T + V$, also die Summe der kinetischen u. potentiellen Energien.

Im Gegensatz dazu kann man auch diejenige Erhaltungsgrösse, die sich aus der oben angewandten Symmetrie, nämlich der Zeittranslationsinvarianz, ergibt, ✓ als Energie definieren (vgl. z.B. Landau/Lifschitz).

Wir stellen dabei fest, dass in ~~alle~~ vielen Fällen die erhaltene Grösse

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L\right) \equiv E = T + V \quad ✓$$

ist. Jedoch trifft dieses nicht immer, insbesondere bei dieser Aufgabe nicht, ~~zu~~ zu. ✓

Hier ist die erhaltene Grösse $E = \tilde{T} + \tilde{V}$ ✓; $\tilde{T}$ und $\tilde{V}$ sind aufgrund ihrer Abhängigkeiten mit diesen Symbolen bezeichnet worden. T und V ohne Schlange ergaben sich aus tatsächlichen Energieüberlegungen; ihre Summe jedoch ist nicht erhalten. (Das liegt daran, dass durch die Rotationsbewegung ~~Eine~~ ~~Art~~ ~~wie~~ sozusagen eine Kraft ausgeübt ✓ werden kann, die nicht unbedingt konservativ ist.)

1/1

(g) $$\tilde{V} = \underbrace{-ml^2\omega^2\sin^2\Theta}_{(1)} - \underbrace{2lg(M+m)\cos\Theta}_{(2)} \quad ✓$$

∀ Skizzen vom Potential für $\omega \geq \omega_{min}$ und $\omega \leq \omega_{min}$

Wir stellen fest, dass es zum einen einen Term enthält, der aus der Gravitation stammt (2), andererseits aber auch eine Art „Potential aus der Rotation" (1).

Letzteres nimmt grössenordnungsmässig für grosse ω überhand, womit eine Potentialsenke nicht mehr bei $\Theta = 0$, sondern nun bei $\Theta = \pi/2$ ✓ liegt (wg. sin statt cos) (siehe auch (c)).

Dieses mathematische Ergebnis lässt sich so ~~aus~~ interpretieren, dass die Massen bei grossen Winkelgeschwindigkeiten angehoben werden.

1,5/2

(h) ~~Aus EL:~~ $\cancel{2ML\dot\Theta^2\sin\Theta\cos\Theta + 2Ml\ddot\Theta\sin^2\Theta + ml\ddot\Theta - ml\omega^2\sin\Theta\cos\Theta + g(m+M)\sin\Theta = 0}$ ← nein

Energieerhaltung: $$E = 2Ml^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\sin^2\Theta + ml^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 - ml^2\omega^2\sin^2\Theta - 2lg(M+m)\cos\Theta \quad ✓$$

$$\Leftrightarrow 2Ml^2\frac{d\theta^2}{dt^2}\sin^2\theta + ml^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = E + ml^2\omega^2\sin^2\theta + 2lg(M+m)\cos\theta$$

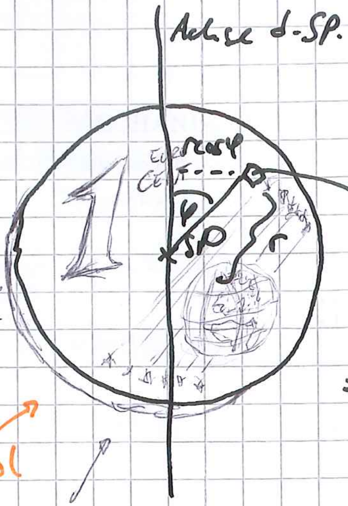
$$\Leftrightarrow dt = d\theta \cdot \sqrt{\frac{2ML^2\sin^2\theta + ml^2}{E + ml^2\omega^2\sin^2\theta + 2lg(M+m)\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \int dt = t = t(\theta) = \int d\theta \cdot \sqrt{\frac{2Ml^2\sin^2\theta + ml^2}{E + ml^2\omega^2\sin^2\theta + 2lg(M+m)\cos\theta}} \quad ✓$$

2/2

(Das kann nicht mal Wolfram Alpha lösen, aber wenn man es lösen würde, hätte man $t(\theta)$)

3.3.



Dicke d

$$\Rightarrow I_S = \int_0^R \int_0^{2\pi} dr \cdot r d\varphi \cdot d \cdot \rho \cdot (r\cos\varphi)^2$$

$$d \cdot \rho = \frac{M}{\pi R^2} \Rightarrow I = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} dr \cdot r d\varphi \cdot r^2 \cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow I = \int_0^R \int_0^{2\pi} dr\, d\varphi\, r^3 \cos^2\varphi$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \left[\frac{1}{2}\varphi + \underbrace{\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi}_{0}\right]_0^{2\pi}$$

$$= M \cdot \frac{1}{4} R^2 = \frac{1}{4} MR^2 \checkmark$$

Satz v. Steiner $\Rightarrow$ $I_A = MR^2 + \frac{1}{4} MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$ ✓

10