||

ANALYTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK
Prof. Arthur HEBECKER
S. Kraus & C. Mayrhofer

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Sommersemester 2012

Maliken Renz
Jannis A. Schnitzer

Montag, $16^{00}$
Jenny Carosio

# 2. ÜBUNGSBLATT

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 7 | 2 | 24 |

Die schriftlichen Aufgaben sind am 30.04.2012 in den Tutorien abzugeben.

**Aufgabe 2.1** (10 Punkte):

a) Führen Sie sich noch einmal die Lösung von Aufgabe 1.4 zu Gemüte und leiten Sie anschließend das Reflexions- und Brechungsgesetz her, indem Sie die Minima der sogenannten "optischen Wege" $\int n(\mathbf{y})|\mathbf{dy}|$ berechnen. $n$ bezeichne hier den Brechungsindex in den verschiedenen Medien, siehe Abbildung 1.

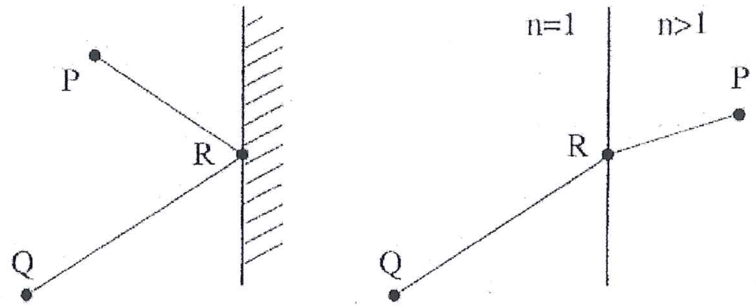



Abbildung 1: Reflexion und Brechung

b) Eine Kugel rolle im Schwerefeld der Erde vom Punkt $\mathbf{x}_1 = (0,0)$ zum Punkt $\mathbf{x}_2 = (a, -h)$. Welche Form sollte der Hang haben, damit eine anfangs ruhende Kugel am schnellsten beim Punkt $\mathbf{x}_2$ ankommt?
*Hinweis*: Der Hang sei beschrieben durch $y \equiv y(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y(a) = -h$. Verwenden Sie für die Herleitung des Funktionals $T[y]$ die Energieerhaltung. Lösen Sie die bei der Variation erhaltene Euler-Lagrange-Gleichung. Hierzu bringen Sie sie erst auf die Form

$$-2\,y\,y'' = 1 + (y')^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2\,y'\,y''}{1+(y')^2} = -\frac{y'}{y} \tag{1}$$

und benutzen danach, dass $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ist. Die so erhaltene Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich nun durch Separation der Variablen lösen. Für die Lösung des Integrals $\int \mathrm{d}\xi \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}$ verwenden Sie eine geschickte Substitution mit trigonometrischen Funktionen.

**Aufgabe 2.2** (10 Punkte):
In der Vorlesung wurde die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung mit einem Freiheitsgrad vorgeführt. Hierzu wurde $F[y]$ am Extremum mit einer Funktion $\alpha\,\delta y$ gestört. Leiten Sie nun in Analogie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Fall mit mehreren Freiheitsgraden her. Argumentieren Sie sorgfältig warum es zu mehreren unabhängigen Differentialgleichungen kommt.

**Aufgabe 2.3** (10 Punkte):
Betrachten Sie die in Abbildung 2 dargestellte Anordnung: eine Masse $M$ sei im homogenen Schwerefeld $\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_x$ an einer masselosen Feder (Federkonstante $k$) aufgehängt und kann sich nur in $x$-Richtung bewegen. An dieser Masse sei eine zweite Masse $m$ über eine masselose Stange der Länge $l$ aufgehängt. Die Bewegung dieser Masse sei auf die $x$-$y$-Ebene beschränkt.

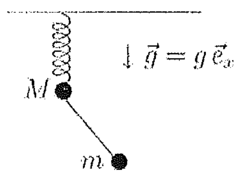



Abbildung 2: Feder mit Pendel

a) Führen Sie geeignete generalisierte Koordinaten ein.

b) Bestimmen Sie die Wirkung bzw. die Lagrange-Funktion für dieses System.

c) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen bzw. Euler-Lagrange-Gleichungen ab.

**Aufgabe 2.4** (10 Punkte):
Ein Seil sei mit beiden Enden am selben Punkt befestigt und hänge senkrecht zu Boden. Nun wird eines der beiden Enden gelöst. Beschreiben Sie den Bewegungsverlauf dieses Seilendes, wenn die Länge des Seils $l$ ist. Geben Sie die Geschwindigkeit explizit in Abhängigkeit der Position des Seilendes und die bis dahin verstrichene Zeit als Integral an. Was ist die Höchstgeschwindigkeit des Seilendes

a) physikalisch?

b) mathematisch?

*Hinweis*: Nehmen Sie an, dass das "abgerollte" Seilstück sofort zum Stillstand kommt und seine kinetische Energie auf den noch fallenden Teil überträgt. Weiterhin sei die Bewegung dermaßen idealisiert, dass es während der gesamten Bewegung zu keiner Seitwärtsbewegung kommt. Sowohl der bewegte als auch der ruhende Teil des Seils sei also immer jeweils senkrecht.

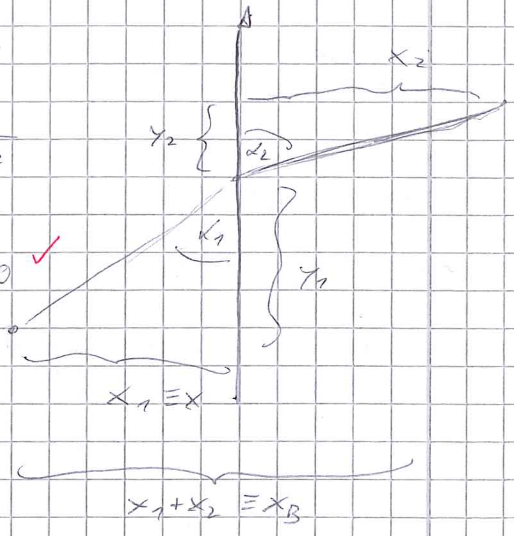
1 € = 1,325 $

$\rightarrow \dfrac{599\,\$}{1{,}325\,\$/€} = \underline{452{,}07\,€}$

2.1 a) $\int_Q^R n_1 ds + \int_R^D n_2 ds = n_1 s_1 + n_2 s_2$ ✓

$$= n_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= n_1 \sqrt{x^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_2^2}$$




Minimieren: $\frac{d}{dx}\left(n_1 \sqrt{x^2+y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_2^2}\right) = 0$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{n_1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y_1^2}} - \frac{n_2 \, 2(x_B - x)}{2\sqrt{(x_B-x)^2 + y_2^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}} = n_2 \frac{(x_B - x)}{\sqrt{(x_B-x)^2 + y_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

(siehe Skizze)

Und was ist mit Reflexion?

3

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$ ✓

b) $T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt$ soll minimal werden.

Es gilt $v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{ds}{v}$

$T[y] \overset{somit}{=} \int_1^2 \frac{ds}{v}$ ✓

Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m v_1^2 + mg\, y_1 = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} m v^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{-2gy} \quad (y < 0)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow T[y] = \int_1^2 dx \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{-2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 dx \underbrace{\sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y}}}_{f(x,y,y')}$$

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-y}}$$

$f(x, y, y')$ muss die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} f - \frac{\partial}{\partial y} f = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'}{2(y(1+y')^2)^{3/2}} \cdot \left(y' + y'y'^2 + 2yy'y''\right) + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2(1+y'^2)}{2(y(1+y'^2))^{3/2}} - \frac{2y\, y'^2\, y''}{2(y(1+y'^2))^{3/2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y''}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} = 0$$

$$\overset{\cdot\sqrt{y(1+y'^2)}}{\Leftrightarrow} \quad y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2} + \frac{1+y'^2}{2y} = 0$$

$$\overset{\cdot 2y}{\Leftrightarrow} \quad 2y''y - y'^2 - \frac{2yy'^2y''}{1+y'^2} + 1+y'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+y'^2 = -2yy''\left(1 - \frac{y'^2}{1+y'^2}\right) + y'^2$$

$$= -2yy''\left(\frac{1+y'^2}{1+y'^2} - \frac{y'^2}{1+y'^2}\right) + y'^2$$

$$= -2yy''\frac{1}{1+y'^2} + y'^2$$

$$\Leftrightarrow (1+y'^2)^2 = -2yy'' + y'^2(1+y'^2) = -2yy'' + y'^2 + y'^4$$

$$\Leftrightarrow 1+2y'^2+y'^4 = -2yy'' + y'^2 + y'^4$$

$$\Leftrightarrow 1+2y'^2 = -2yy'' + y'^2$$

$$\Leftrightarrow 1+y'^2 = -2yy''$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y''}{1+y'^2} = -\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y'y''}{1+y'^2} = -\frac{y'}{y} \quad ✓$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+y'^2)' = (-\ln(y))' \quad ✓$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\ln(1+y'^2) = -\frac{d}{dx}\ln(y) \Rightarrow \int \ldots = -\int \ldots \Rightarrow \ln(1+y'^2) = -\ln(y)$$

$$\Rightarrow 1+y'^2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y}{y}} \Rightarrow \int_0^y dy\sqrt{\frac{y}{1-y}} = \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^y dy\sqrt{\frac{y}{1-y}} = x \overset{y=\sin^2(u)}{=} \int_0^u du\; 2\sin u\cos u\sqrt{\frac{\sin^2 u}{1-\sin^2 u}}$$

(✓)

$$= \int_0^u 2\sin u\cos u\,\frac{\sin u}{\cos u}\,du = \int_0^u 2\sin^2 u\,du = 2\,\frac{u - \sin u\cos u}{2} =$$

$$\Rightarrow x = u - \sin u\cos u$$

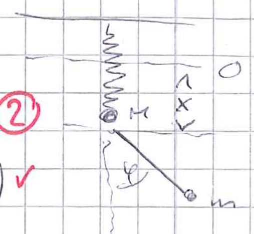
$\Rightarrow$ Der Hang hat die Form $\begin{pmatrix} u-\sin u\cos u \\ \sin^2 u \end{pmatrix}$

Du hast hier ein paar Konstanten unterschlagen...

4

2.3 a) Verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, q_2) = (x, \varphi)$ ✓

x und φ noch angeben. ②




b) Wirkungsfunktional $L = T - V$

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{(x + l\cos\varphi)}^{2} + \dot{(l\sin\varphi)}^{2}\right) ✓$$

$$V = -Mgx - mg(x + l\cos\varphi) + \frac{1}{2}kx^2 ✓$$

Bitte etwas ausführlicher.

(Umformen)

$$\Rightarrow L = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(2\dot{x}l\sin\varphi\cdot\dot\varphi + l^2\dot\varphi^2\right) + Mgx + mgx$$

$$+ mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}kx^2 ✓$$

③

c) DGLs: (1) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$; $\frac{\partial L}{\partial x} = (M+m)g - kx$;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\Rightarrow (M+m)g - kx - (M+m)\ddot{x} = 0$$

(2) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 0$; $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\dot{x}l\cos\varphi\cdot\dot\varphi + mgl\sin\varphi$;

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi + ml\sin\varphi\,\dot{x}$$

$$\Rightarrow ml\cos\varphi\cdot\dot\varphi + mgl\sin\varphi - \frac{d}{dt}\left(m\dot\varphi l^2 + ml\sin\varphi\right) = 0$$

e) (1): $\ddot{x} = \frac{(M+m)g - kx}{(M+m)}$

(2): $0 = ml\cancel{\cos\varphi\cdot\dot\varphi} + mgl\sin\varphi - ml^2\ddot\varphi - ml\cancel{\cos\varphi\cdot\dot\varphi}$

$\Leftrightarrow 0 = mgl\sin\varphi - ml^2\ddot\varphi$

$\Leftrightarrow \ddot\varphi = \frac{g}{l}\sin\varphi$

②

2.4 Verallgemeinerte Koordinate $q = x$ (Abstand des Seilendes vom Aufhängungspkt.)

m(x)?

$L = T - V$ ; $T = \frac{1}{2} m \cdot \left( \frac{\frac{1}{2}(l-x)}{l} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{4} m \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dot{x}^2$ ✓

$V = \cancel{g}\, m \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x$ (✓)

∀ Skizze! Was ist x, l, ...?

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \dot{x}^2 - m \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} \frac{x}{l} \cdot \dot{x}^2 - m \cdot \frac{1}{2} x + m \cdot \frac{1}{2} \frac{x}{l} \cdot x$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x} - \frac{1}{2} m \frac{x}{l} \cdot \dot{x} \right) - \left( -\frac{1}{2} m \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2}{l} - \frac{1}{2} m + m \frac{x}{l} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \ddot{x} - \frac{3}{4} \frac{m}{l} \dot{x}^2 - \frac{m}{l} x \ddot{x} + \frac{1}{2} m - \frac{m}{l} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l} \dot{x}^2 - 2 \cdot \frac{1}{l} \cdot x \cdot \ddot{x} - \frac{2}{l} \cdot x + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ ?

Benutze Energieerhaltungssatz um v(x) zu erhalten!

2