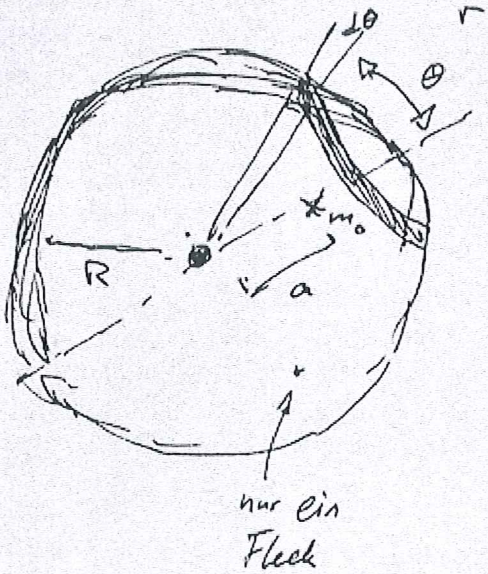
Theoretische Physik II, 1. Übungsblatt

SCHNITZLER, RENZ

1.1	1.2	1.3	1.4	Σ
8	6	9	10	33

1.1. Lt. Vorlesung:

$$dV = -\frac{m G_N \rho_F}{r} \cdot (R\, d\theta) \cdot (2\pi R \cdot \sin\theta) \quad \text{(Volumenelement)}$$ ✓



$$r = \sqrt{(a - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}$$

Potential:

$$V = -m G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\theta \sin\theta}{\sqrt{A - B\cos\theta}}$$

wobei $A := a^2 + R^2$

$B := 2aR$

Wir substituieren: $\cos\theta = x$ ✓; $-\sin\theta\, d\theta = dx$

$$\Rightarrow \quad V = -m G_N \rho_F \cdot 2\pi R^2 \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}} = -\frac{1}{(-B)} \cdot 2 \cdot \sqrt{A - Bx}\,\Big|_1^{-1}$$ ✓

$$= \frac{2}{B}\left(\sqrt{A+Bx} - \sqrt{A-Bx}\right)\Big|_1^{-1}$$

$$= \frac{2}{2aR}\left(\sqrt{a^2+R^2+2aR} - \sqrt{a^2+R^2-2aR}\right)$$

$(a^2+R^2-2aR) = (a-R)^2$; da $a<R$ ist $\sqrt{(a-R)^2} = (R-a)$

$$= \frac{1}{aR} \cdot \left((R+a) - (R-a)\right)$$

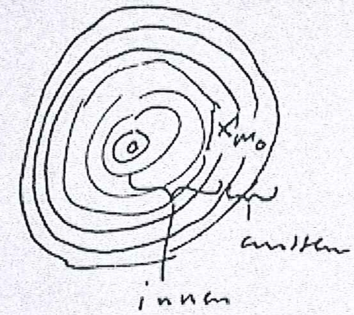
$$= \frac{1}{aR} \cdot 2a = \frac{2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad V = -m G_N \rho_F \cdot 4\pi R = -\frac{G_N m \cdot M}{R}$$ ✓

8

1.2. a) Wir können uns eine massive Kugel zusammengesetzt aus vielen Sphären vorstellen. ✓

An jedem Punkt im Kugelinneren wirkt nur die Gravitationskraft von denjenigen Sphären, die weiter innen liegen; die äusseren üben auf eine Masse in ihrem Inneren keine Kraft aus. ✓



Aus der Linearität der Newton'schen Gravitation folgt somit:

$$V(r) = -G_N \cdot m \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3}_{\text{Volumen der Innenkugel mit Radius } r<R_{Erde}} \cdot \rho \cdot \frac{1}{r}$$

(im Erdinneren)

Achtung: M erst nach Ableiten ersetzen!

$$= -G_N \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi r^2 \cdot \rho$$

$$F = -\frac{dV(r)}{dr} = +G_N \cdot m \cdot \frac{8}{3}\pi r \rho \; ↯$$

2

$\Rightarrow$ Proportionalitätsfaktor $k = G_N \cdot m \cdot \frac{8}{3}\pi \cdot \rho$

b) Da das Potential $\sim r^2$ ist, handelt es sich um einen harmonischen Oszillator. ✓ Somit ist die Periodendauer wie üblich

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} ✓ = 2\pi \sqrt{\frac{3}{8 G_N \pi \rho}} = \sqrt{\frac{12\pi}{8 G_N \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2 G_N \rho}}$$

Folgefehler

(übrigens: $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$)

4

(WolframAlpha.com)

$= \underline{\underline{3578\,s}}$ ↯

1.3 a) Bei der Weglänge im Gebirge addiert sich zum infinitesimalen Längenstück der Ebene noch ein infinitesimales Höhenstück. Dies kann auf infinitesimaler Ebene mit dem Satz des Pythagoras geschehen. D.h. ✓

$$F[\bar{\gamma}] = \int_{\bar{\gamma}_a}^{\bar{\gamma}_b} \sqrt{ds^2+dz^2} = \int_{\bar{\gamma}_a}^{\bar{\gamma}_b} \sqrt{|d\bar{\gamma}|^2+dz^2(\bar{\gamma})}$$

Das kann man weiter vereinfachen.

$$= \int_0^1 d\tau \sqrt{\frac{|d\bar{\gamma}|^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2}} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\bar{\gamma}}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$ ✓ 3

b) Berechne zunächst $\frac{d\bar{\gamma}}{d\tau}$ sowie $\frac{dz}{d\tau}$

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}H_0 + H_0\tau \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(-H_0)\cdot\sqrt{1-(\tau-\tfrac{1}{2})^2}$$

(da $z(\tau) = H_0 - \sqrt{H_0^2 - x^2 - y^2}$
und $x(\tau) = (\tau - 1/2)\cdot H_0$
und $y(\tau) = 0$) } gem. geg. Parametrisierung

$$\frac{d}{d\tau}\sqrt{1-(\tau-1/2)^2} = \ldots$$

$$\sqrt{1-(\tau-1/2)^2} = \sqrt{x} \circ (1-y^2) \circ (\tau - 1/2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\sqrt{1-(\tau-1/2)^2} = \frac{d\sqrt{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{d\tau}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(-2)y\cdot 1 = -\frac{\tau-1/2}{\sqrt{1-(\tau-1/2)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{d\tau} = + H_0 \cdot \frac{\tau - 1/2}{\sqrt{1-(\tau-1/2)^2}}$$

$$\rightsquigarrow \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} = \int_0^1 d\tau \sqrt{H_0^2 + H_0^2 \left(\frac{(\tau-1/2)^2}{\sqrt{1-(\tau-1/2)^2}^2}\right)}$$

$$= H_0 \int_0^1 d\tau \sqrt{1 + \frac{(\tau-1/2)^2}{1-(\tau-1/2)^2}}$$

$$= H_0 \int_0^1 d\tau \sqrt{\frac{1-(\tau-1/2)^2}{1-(\tau-1/2)^2} + \frac{(\tau-1/2)^2}{1-(\tau-1/2)^2}}$$

$$= H_0 \cdot \int_0^1 d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\tau-1/2)^2}}$$

Substituiere $\xi := (\tau - 1/2)$

$$d\xi = \frac{d\xi}{d\tau} \cdot d\tau = 1 \cdot d\tau$$

$$\Longrightarrow H_0 \cdot \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-(\tau-1/2)^2}} = H_0 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} =: I \quad ✓$$

Wir wissen aus der Vorlesung der Theoretischen Physik I, dass

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin(\xi)$$

$$\Rightarrow I = \arcsin(\xi)\Big|_{-1/2}^{1/2} = \arcsin(\tau - 1/2)\Big|_0^1$$

$$= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ✓$$

6

1.4. Indem wir $z(\bar{y}) \equiv 0$ setzen, erhalten wir zunächst

$$F[\bar{y}] = \int_0^1 d\tau \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, . \checkmark$$

Betrachten wir nun analog zur Vorlesung eine Variation des Funktionalarguments erhalten wir:

$$F[\bar{y} + \alpha x + \beta y] = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau} + \alpha \frac{d\delta x}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} + \beta \frac{d\delta y}{d\tau}\right)^2} \checkmark$$

Taylorentwicklungen in beiden Dimensionen; analog zur Vorlesung; liefern:

$$F[\bar{y}] + \int_0^1 d\tau \left\{ \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial x} \cdot \alpha \, \delta x + \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial \dot{x}} \cdot \alpha \frac{d}{d\tau} \delta x \right\} + O(\alpha^2)$$

sowie $F[\bar{y}] + \int_0^1 d\tau \left\{ \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial y} \cdot \beta \, \delta y + \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} \cdot \beta \frac{d}{d\tau} \delta y \right\} + O(\beta^2)$

Woraus sich durch partielles Integriere sowie der Identitäten $\frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial x} = 0$ und $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$ ergibt, dass

$$\int_0^1 d\tau \left\{ -\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial \dot{x}} \cdot \delta x \right\} = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_0^1 d\tau \left\{ -\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\partial \dot{y}} \cdot \delta y \right\} = 0 \quad \text{(analog zur VL)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0 \wedge \frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = 0 \checkmark \wedge \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \checkmark$$

Einfacher: Setze $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = A$, $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = B$ $(A, B = \text{const})$

Auswertung der Ableitungen $\frac{d}{d\tau}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\ddot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \cdot (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \cdot \dot{x}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\ddot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\cdot\dot{x} \wedge$$
$$\ddot{y}\cdot\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\cdot\dot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = (\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\cdot\dot{x} \wedge$$
$$\ddot{y}\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = (\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y})\cdot\dot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2\cdot\ddot{x}+\dot{y}^2\cdot\ddot{x} = \dot{x}^2\cdot\ddot{x}+\dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\ddot{y} \wedge$$
$$\dot{x}^2\cdot\ddot{y}+\dot{y}^2\cdot\ddot{y} = \dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\ddot{x}+\dot{y}^2\cdot\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2\cdot\ddot{x} = \dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\ddot{y} \wedge \quad \Rightarrow \quad \dot{y}\cdot\ddot{x} = \dot{x}\cdot\ddot{y} \wedge \quad \Rightarrow \quad \dot{y}\cdot\frac{d\dot{x}}{d\tau} = \dot{x}\cdot\frac{d\dot{y}}{d\tau} \wedge$$
$$\dot{x}^2\cdot\ddot{y} = \dot{x}\cdot\dot{y}\cdot\ddot{x} \qquad \dot{x}\cdot\ddot{y} = \dot{y}\cdot\ddot{x} \qquad \dot{x}\cdot\frac{d\dot{y}}{d\tau} = \dot{y}\cdot\frac{d\dot{x}}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{d\dot{y}} = \frac{\dot{x}}{d\dot{x}} \wedge \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = C\cdot\dot{y}$$
$$\frac{\dot{x}}{d\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{d\dot{y}}$$

Kehrbruch, integrieren, $e^{()}$

&

$$\Rightarrow dx = C\,dy \Rightarrow x = \underbrace{Cy + C\cdot D}_{\text{Geradengleichung}}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} x \\ Cy + C\cdot D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Cy + \tilde{C} \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \hat{C}, D \text{ Integrationskonst.}$$
$$(C := e^{\hat{C}})$$
$$(\tilde{C} := C\cdot D)$$

Aus der Tatsache, dass sich aus dem obigen gekoppelten System von DGL nur eine Geradengleichung für $\bar{y}$ ergibt, lässt sich qua Voraussetzung schließen, dass der kürzeste Weg eine Gerade ist.

10