Jonathan Förste
Jannis Andrija Schnitzer
Dang Duy Thao Le

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik
Prof. Dr. A. Hebecker
S. Kraus Gruppe 4 Konrad Heimpel

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2011/12

9. Übungsblatt

1	2	3	4	5	6	Σ
2	4	0	3	~~4~~ 3	6	~~16~~ 18

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 12.12.2011 in den Tutorien

Aufgabe 9.1 (8 Punkte):
Eine allgemeine Galilei-Transformation $g \in G$ sei explizit gegeben durch

$$x'^i = R^{ik}x^k + v^i t + b^i, \; t' = t + c$$

wobei $R \in O(3)$, $v, b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a) Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass sich jede Galilei-Transformation $g \in G$ darstellen lässt als $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ wobei g_3 ein Boost ist, g_2 eine Translation und g_1 eine Rotation. Finden Sie für die oben angegebene allgemeine Galilei-Transformation die Transformationen g_i, $i = 1, 2, 3$, d.h. drücken Sie die g_i durch R, v, b und c aus.

(b) Berechnen Sie die inverse Transformation und zeigen Sie, dass diese ebenfalls eine Galilei-Transformation ist.

(c) Auch zwei hintereinander ausgeführte allgemeine Galilei-Transformationen ergeben wieder eine Galilei-Transformation. Betrachten Sie zwei solcher Transformationen definiert durch R_j, v_j, b_j, c_j, $j = 1, 2$ wie oben und drücken Sie die Parameter der zusammengesetzten Transformation durch diese Größen aus.

(d) Da die Galilei-Transformationen außerdem noch bezüglich ihrer Hintereinanderausführung assoziativ sind, bilden sie eine Gruppe, die Galilei-Gruppe G. Bestimmen Sie die Anzahl der Parameter, durch die die Galilei-Gruppe beschrieben wird. Findens Sie (mindestens) drei nichttriviale Untergruppen der Galilei-Gruppe und untersuchen Sie für jede davon, ob sie abelsch oder nicht-abelsch ist.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass $R \in SO(2)$ als

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

darstellbar ist und identifizieren Sie $SO(2)$ mit $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. (Bemerkung: Die Gruppenoperation kann mit der komplexen Multiplikation identifiziert werden.)

Aufgabe 9.3 (2 Punkte):
Benutzen Sie die Transformationseigenschaften des Levi-Civita-Tensors sowie von Vektoren unter $SO(3)$ um direkt nachzurechnen, dass $(\epsilon')^{ijk}(a')^j(b')^k = R^{il}\epsilon^{ljk}a^j b^k$ ist.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte):

(a) Finden Sie die Matrix $R_{yz} \in O(3)$, die eine Spiegelung bzgl. der Ebene $y = z$ darstellt.

(b) Schreiben Sie diese als $R_{yz} = R \cdot R_x$ wobei $R \in SO(3)$ und R_x die Reflexion bzgl. der Ebene $x = 0$ darstellt.

Bitte wenden

Aufgabe 9.5 (6 Punkte):
Ein Sprinter der Masse m mit unbegrenzter Kraft läuft auf einem beschleunigten Eisenbahnwagen der Masse M. Zwischen seinen Schuhen und der Oberfläche des Eisenbahnwagens wirkt eine Haftkraft mit Haftreibungskoeffizient μ_{H}. Nehmen Sie an, dass der Sprinter seine Kraft so steuern kann, dass er immer die maximale Haftkraft für seine Beschleunigung ausnutzt. Welche Geschwindigkeit relativ zum Eisenbahnwagen erreicht er nach der Zeit T wenn

(a) die Beschleunigung des Wagens $a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$ beträgt?

(b) der Wagen mit einer konstanten Kraft F beschleunigt wird?

Der Sprinter und der Wagen starten jeweils in Ruhe in Bezug auf die Umgebung. Laufrichtung und Fahrtrichtung des Wagens sind identisch. Bei Teilaufgabe (b) dürfen Sie **nicht** annehmen, dass $m \ll M$ ist.

Aufgabe 9.6 (6 Punkte):
Betrachten Sie den Vektorraum M der Tensoren vom Rang $m = 2$ in $V = \mathbb{R}^n$. Wie Sie wissen transformiert sich $t \in M$ wie $t \to t' = D(R)t$ unter $SO(n)$, wobei $D(R)$ die $m = 2$ Tensordarstellung von $SO(n)$ mit Komponenten $D(R)^{ij,kl} = R^{ik}R^{jl}$ ist und $R \in SO(n)$. Zerlegen Sie den Tensor t^{ij} gemäß

$$t^{ij} = t_{\mathrm{a}}^{ij} + t_{\mathrm{s}}^{ij} + \frac{t_{\mathrm{sp}}}{n}\delta^{ij}$$

wobei $t_{\mathrm{sp}} = \sum_{i=1}^{n} t^{ii}$ die Spur und t_{a}^{ij} bzw. t_{s}^{ij} den spurlosen (anti-)symmetrischen Anteil des Tensors bezeichnet. Zeigen Sie: t_{a}^{ij}, t_{s}^{ij} und $\frac{t_{\mathrm{sp}}}{n}\delta^{ij}$ liegen in je einem *invarianten Unterraum* U_{a}, U_{s}, U_{sp} von M, d.h. zeigen Sie $D(R)t_{\mathrm{a}} \in U_{\mathrm{a}}$ usw.
Übrigens: Darstellungen für die solche invarianten Unterräume existieren heißen *reduzibel.*

.2011 Theoretische Physik I

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

$g: x'^i = R^{ik} x^k + v^i t + b^i$; $t' = t + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

$R \in O(3)$, $v, b \in \mathbb{R}^3$

a)

$g_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (t, x) \longmapsto (t, Rx)$ Rotation

$g_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (t, x) \longmapsto (\underbrace{t+s}_{\mathbb{R}}, \underbrace{x+y}_{\mathbb{R}})$ Translation

$g_3: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad (t, x) \longmapsto (t, x + vt)$ Boost

$g_3 \circ g_2 \circ g_1 = g$

$g_3(g_2(g_1)) = g$

$(t+s, Rx + y + vt) = g(t, x) \equiv (t', x')$

$t' = t+s \quad x' = Rx + y + vt + \cancel{\varepsilon^{ijk}}$? für $i = j$

$$x' = \begin{pmatrix} R^{1k} x^k \\ R^{2k} x^k \\ R^{3k} x^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^1 t \\ v^2 t \\ v^3 t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \quad ; \ t' = t + c$$

$x' = Rx + t \cdot v + b$

$y \equiv b \quad s \equiv c$ ✓ q.e.d.

Was ist nun g_1 & g_2 & g_3 ?

-1,5

b)

$g^{-1}(x', t') = (x, t)$

$g^{-1}(Rx + t \cdot v + y, t+s) = (x, t)$

$g^{-1}: (x', t') \to (R^T x' - R^T y - t R^T v, t' - s)$ f -1

siehe Ü-Stunde!

$(Rx + t \cdot v + y) - y - t \cdot v = x' - y - tv = Rx$

was ist mit t?

-0,5

$R^T R = \mathbb{1}$

$R^T (x' - y - tv) = x = R^T x' - R^T \cdot y - t R^T \cdot v$

$x^i = R^{ki} (x' - y - tv)^k = R^{ki} x'^k - R^{ki} y^k - t \cdot R^{ki} v^k$

daher: $x = R^T (x' - y - tv) = R^T x' - R^T y - t R^T v$

$g^{-1}: (x', t') \mapsto (R^T x' - R^T y - t(R^T v), t' - s) \equiv (x, t)$

allg.: $x^i = R'^{ik} x'^k + v'^i \cdot t' + b'^i$; $t = t' + c'$

Koeffizientenvergleich: $R' \equiv R^T$; $v' \equiv \underbrace{-R^T \cdot v}_{\in \mathbb{R}^3}$; $b' \equiv \underbrace{-R^T \cdot y}_{\in \mathbb{R}^3}$; $c' = \underbrace{-s}_{\in \mathbb{R}}$

$R^T \in O(3)$ per Def. ✓ da $R \in O(3)$ f ✓ f ✓

c) R_j, v_j, b_j, c_j, $j = 1, 2$ $\tilde{g}_{j=1} \circ \tilde{g}_{j=2}$

$\tilde{g}_j : (x,t) \mapsto (R_j x + b_j + v_j t, t + c_j) \equiv x' t'$

$\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 : (x,t) \mapsto (R_2(R_1 x + b_1 + v_1 t) + b_2 + v_2(t + c_1), (t + c_1) + c_2)$

$= (\underbrace{\underbrace{R_2 R_1}_{\in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^3}}_{\in \mathbb{R}^3} + R_2 b_1 + R_2 v_1 t + b_2 + v_2 t + v_2 c_1, t + \underbrace{c_1 + c_2}_{\text{const.} \in \mathbb{R}})$

b'' $v''t$

$= (x'', t'')$

$= (\underbrace{\underbrace{\underbrace{R_2 R_1}_{\in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^3}}_{\in \mathbb{R}^3}}_{\equiv R'' x} + \underbrace{\underbrace{R_2 b_1}_{\in \mathbb{R}^3} + \underbrace{R_2 v_1 t}_{\in \mathbb{R}^3} + b_2}_{\equiv b''} + \underbrace{v_2 t}_{\equiv v'' t} + v_2 c_1, \underbrace{t + \underbrace{c_1 + c_2}_{\text{const.} \in \mathbb{R}}}_{\equiv t + c''})$ ✓

✓ f f ✓ −1

d) Galilei-Transformation geg. durch $g: Rx + vt + b$, $t + c$ ↳ $\mathbb{R}$

R: Matrix $\in O(3)$ → 3 Freiheitsgrade ≙ skalare Parameter

v, b: 2 Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ ↳ 6 skalare Parameter

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{10 Freiheitsgrade}}$ ✓

Was ist das für eine Gruppe?

Untergruppe: $G_{2,3}$: $\{g \in G \mid R = 1\}$

$g, g' \in G_{2,3}$ Zz.: Ist $g \circ g' = g' \circ g$ dann: $G_{2,3}$ ist abelsch

$g \circ g'(x,t) \stackrel{!}{=} g' \circ g(x,t)$

$g(x + v't + b', t + c') = g'(x + vt + b, t + c)$

$(x + v't + b' + v(t + c') + b, t + c' + c) = (x + vt + b + v'(t + c) - b', t + c + c')$

$x + v't + b + vt + vc' + b, t + c + c' \neq x + vt + b + v't + v'c + b', t + c + c'$

$\Rightarrow g_2 \circ g_3$ **nicht abelsch!** f −2

.2011

Aufgabe 9.2

$$R=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; ; R^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(R) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \qquad (1)$$

$$R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad (2)$$

$$a_{22}^2 + a_{12}^2 = 1 \qquad (3)$$

$$a_{21}a_{22} = -a_{11}a_{12} \qquad (4)$$

$$a_{11}^2 = a_{22}^2 \Rightarrow a_{11} = \pm a_{22} = s \cdot a_{22} \; ; s \in \{-1, 1\}$$

$$\rightarrow \text{in } (4): s \cdot a_{21}a_{11} = -a_{12} \cdot a_{11} \Leftrightarrow s \cdot a_{21} = -a_{12}$$

$$\Leftrightarrow -s \cdot a_{21} = a_{12}$$

$$\rightarrow \det(R) = s \cdot a_{11}^2 + s \cdot a_{21}^2 = 1$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 = s \Rightarrow s = 1$$

$$\Rightarrow a_{11} = a_{22} = a$$

$$a_{12} = -a_{21} = b \qquad \rightarrow \qquad R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{a^2}_{\geq 0} = 1 - \underbrace{b^2}_{\geq 0} \Rightarrow 1 - b^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow |b| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$$

ebenso für a $\Rightarrow -1 \leq a \leq 1$

Wähle $a = \sin\alpha$, $b = \cos\beta$ mit $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\beta \in [0, \pi]$ ✓

(Auf diesen Intervallen sind die Funktionen bijektiv. ✓

Wir wissen: $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \cos^2\alpha$ wegen $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \; \forall \varphi$

$\Rightarrow \cos\beta = \pm\cos\alpha = b$

Nun zu zeigen: $\forall \alpha$ mit $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$ $\exists \beta$ mit $a = \sin\beta$, $b = -\cos\beta$,

dann können alle Drehmatrizen als $R(\varphi)$ dargestellt werden.

Zg.: $\exists \beta : \sin(\alpha) = \sin(\beta) \wedge \cos(\alpha) = -\cos(\beta)$

Bew.: Betrachte zunächst nur $\alpha, \beta \in [0, 2\pi) =: J$, da Sinus und Kosinus periodisch mit Periode 2π

setze: $A := [0; \frac{\pi}{2}] \wedge [\frac{3}{2}\pi; 2\pi]$

$B := [\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$

$\sin_{|A}(x)$ und $\sin_{|B}(x)$ sind beide bijektiv.

Damit gilt $\alpha = \beta$, wenn α und β aus derselben Menge kommen. Das ist nach Voraussetzung nur für $\cos(\alpha) = 0$ möglich. Betrachte also $\alpha \in A$ und $\beta \in B$.

Jeder Wert y mit $y = \sin_{|A}(\alpha) = \sin_{|B}(\beta)$ zwischen -1 und 1 wird für genau ein α und genau ein β getroffen, d.h. es existiert eine Bijektion.

$f: A \to B,\ \alpha \mapsto \beta$. Anschaulich ist klar, dass gilt:

$$f(\alpha) = \left.\begin{cases} \pi - \alpha & \text{für } [0; \frac{\pi}{2}] \\ \underbrace{3\pi - \alpha}_{= \pi - \alpha + 2\pi} & \text{für } [\frac{3}{2}\pi; 2\pi] \end{cases}\right\} = \beta$$

Wegen der Periodizität gilt danach allgemein: $\beta = \pi - \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Setzen wir dieses β in $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$ ein, so erhalten wir (*) $\cos(\alpha) \stackrel{!}{=} \cos(\pi - \alpha)$; die Periode kann vernachlässigt werden. Aufgrund der Eigenschaften des Kosinus, wissen wir, dass $-\cos(\alpha) = \cos(\pi + \alpha)$, also

$$-\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \pi - \alpha)$$
$$= \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$$, wegen Periodizität.

Da der Kosinus aber achsensymmetrisch ist, gilt $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ und (*) ist damit bewiesen.

Somit kann jede Drehmatrix (Erinnerung: $R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$) als die folgende Matrix dargestellt werden:

$$R = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$$ ✓

.2011 Leider ist das noch falsch herum, also setzen wir $\varphi := \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ und $R = \begin{pmatrix} \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) & \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) \\ -\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) & \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$.

Dann hättet ihr euch das ganze Geschreibe von vorher auch sparen können!

Wir wissen, dass $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ und $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ (auch anschaulich klar). Damit ist $R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (eindeutig für $\varphi \in [0; 2\pi)$) ✓ $\square$

Nun gesucht: Bijektion $SO(2) \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} =: M$.
$z \in \mathbb{C}$ hat OBDA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Form $|z| e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0; 2\pi)$. Also können wir M als $\{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi)\}$ bzw. $\{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0; 2\pi)\}$
Offensichtlich (nach vorherigem Beweis) existiert eine bijektive Abbildung $w: SO(2) \xrightarrow{\sim} [0; 2\pi), R \mapsto \varphi_R$, da jede Matrix R eindeutig durch den charakteristischen Winkel beschrieben werden kann. Es gibt auch eine bijektive Abbildung $c: [0; 2\pi) \xrightarrow{\sim} M; \varphi \mapsto e^{i\varphi}$; auch das ist offensichtlich. Damit ist die Identifikationsabbildung $i: SO(2) \to M, R \mapsto c \circ w(R) = c(w(R)) = c(\varphi_2)$ bijektiv. ✓ $\square$

Eigentlich noch z.z.: Bijektion erhält die Gruppenstruktur der Winkeladdition

Aufgabe 9.3

$$(\varepsilon')^{ijk} \cdot (a')^j \cdot (b')^k = R^{il} \cdot \varepsilon^{ljk} \cdot R^{jj} a^j R^{kk} b^k = R^{il} \cdot \varepsilon^{ljk} \cdot R^{jj} \cdot R^{kk} \cdot a^j \cdot b^k$$
$$= \underline{\underline{R^{il} \cdot \varepsilon^{ljk} \cdot a^j \cdot b^k}} \quad \text{q.e.d.}$$

f

siehe Ü-Stunde!

-2

12011 <u>Aufgabe 9.4</u>

a)

$$R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

			x y z		
a_{11}	a_{12}	a_{13}	$xa_{11} + ya_{12} + za_{13} = x$	$\Rightarrow a_{11} = 1$	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$xa_{21} + ya_{22} + za_{23} = z$	$\Rightarrow a_{23} = 1$	sonst. $= 0$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	$xa_{31} + ya_{32} + za_{33} = y$	$\Rightarrow a_{32} = 1$	

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}} \checkmark \qquad \det R_{yz} = -1 \checkmark$$

$-(1+0+0)+0+0+0$

b)

Reflexion an Ebene $x=0$:

$$R_x \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

			x y z		
b_{11}	b_{12}	b_{13}	$xb_{11} + yb_{12} + zb_{13} = -x$	$\Rightarrow b_{11} = -1$	
b_{21}	b_{22}	b_{23}	$xb_{21} + yb_{22} + zb_{23} = y$	$\Rightarrow b_{22} = 1$	sonst. $= 0$
b_{31}	b_{32}	b_{33}	$xb_{31} + yb_{32} + zb_{33} = z$	$\Rightarrow b_{33} = 1$	

$$\underline{\underline{R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \checkmark \qquad \det(R_x) = -1 \checkmark$$

$-(0+0+0) + ((-1)+0+0)$

$$R_{yz} = R \cdot R_x \checkmark \quad ; \quad R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

	-1	0	0
	0	1	0
	0	0	1
$c_{11}\ c_{12}\ c_{13}$	1	0	0
$c_{21}\ c_{22}\ c_{23}$	0	0	1
$c_{31}\ c_{32}\ c_{33}$	0	1	0

richtig!

$\Rightarrow c_{11} = -1$

$\Rightarrow c_{23} = 1$

$\Rightarrow c_{32} = 1$

sonst. $= 0$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad -1 \quad ; \quad R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot R^T = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R \in SO(3)$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R_{yz} = R \cdot R_x}}$$

$$\underline{\underline{\text{mit } R_{yz} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} -1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \; R_x = \begin{pmatrix} -1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}}$$

12.2011 Aufgabe 9.5

a) $F_L = m \cdot a_L \leq \underbrace{F_R = \mu \cdot m \cdot g}_{\text{Haftreibungskraft}}$

maximal

$\Rightarrow \quad m \cdot a_L = \mu \cdot m \cdot g \quad | : m$

für ruhenden Zug:

$a_L = \mu \cdot g$

Bewegter Zug:

$a_L = \mu g - a(t)$

$a_L = \mu g - a_0 \cdot e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow v_L = \int a_L dt = \int (\mu g - a_0 \cdot e^{-\gamma t}) dt$ $\quad e^0 = 1$

$v_L = \mu g t + \frac{a_0}{\gamma}(e^{-\gamma t} - 1)$ $\quad -1$

$\underline{\underline{v_L(T) = \mu g T + \frac{a_0}{\gamma}(e^{-\gamma T} - 1)}}$

b) Skizze:

?

$F'_w = F_w - F_L$ was ist w, was ist w'?

$F'_w = F_w - \mu m g$ $\quad -2$

$F'_L = \mu m g - F'_w$

$F'_L = \mu m g - F_w - \mu m g$

$F'_L = -F_w$

$m \cdot a_L = -M a_w$

$\Rightarrow \int m \cdot a_L \, dt = \int -M a_w \, dt$

$m a_L t = -\frac{M}{m} a_w t \qquad a_L \cdot t = v(t)$

$\underline{\underline{v(T) = -\frac{F_w}{m} \cdot T}}$ f siehe Ü-Stunde

Aufgabe 9.6

Vektorraum M von Tensoren t mit Rang $2 \hat{=} (t^{ij})$

in $V = \mathbb{R}^n \Rightarrow i,j \in \{1,\dots,n\}$

Trf. unter R: $t \mapsto t' = D(R)\cdot t$ mit $D(R)^{ij,kl} = R^{ik}R^{jl}$

und $R \in SO(n) \rightarrow t'^{ij} = R^{ik}R^{jl}t^{kl}$.

Allgemeine Übertragungen:

$$t + \tilde{t} \in M.$$

$$D(R)(t+\tilde{t}) = (D(R)(t+\tilde{t}))^{ij} = D(R)^{ij,kl}\cdot(t+\tilde{t})^{kl}$$
$$= D(R)^{ij,kl}\cdot t^{kl} + D(R)^{ij,kl}\cdot \tilde{t}^{kl}$$
$$= (D(R)\cdot t)^{ij} + (D(R)\cdot \tilde{t})^{ij}$$

$(t^T)^{ij} = t^{ji}$

$t^{ij} = t_a^{ij} + t_s^{ij} + \frac{t_{sp}}{n}\cdot\delta^{ij}$

per Def.: $t_a^{ij} = -t_a^{ji}$; $t_s^{ij} = t_s^{ji}$; $\frac{t_{sp}}{n}\delta^{ij} = \frac{t_{sp}}{n}\delta^{ji}$;

$(\mathbb{1}^T)^{ij} = \delta^{ji} = \delta^{ij} = \mathbb{1}^{ij}$

$(D(R)t^T)^{ij} = R^{ik}R^{jl}(t^T)^{kl} = R^{ik}R^{jl}t^{lk} = R^{jl}R^{ik}t^{lk}$

$= (D(R)\cdot t)^{ji} = ((D(R)t)^T)^{ij}$

$\Rightarrow (D(R)\cdot t^T) = (D(R)\cdot t)^T$

$t^{ij} = t_a^{ij} + t_s^{ij} + \frac{t_{sp}}{n}\delta^{ij}$

$(t^T)^{ij} = t^{ji} = t_a^{ji} + t_s^{ji} + \frac{t_{sp}}{n}\delta^{ji} = -t_a^{ij} + t_s^{ij} + \frac{t_{sp}}{n}\delta^{ij}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(t+t^T)^{ij} = t_s^{ij} + \frac{t_{sp}}{n}\delta^{ij}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(t+t^T) = t_s + \frac{t_{sp}}{n}\mathbb{1}$

$\frac{1}{2}(t-t^T)^{ij} = t_a^{ij}$ $\qquad \frac{1}{2}(t-t^T) = t_a$

Zz.: $t_a \in U_a \overset{!}{\Rightarrow} D(R)\cdot t_a \in U_a$

$$(D(R)\cdot t_a) = D(R)\cdot\left(\tfrac{1}{2}(t-t^T)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(D(R)\cdot t - D(R)(t^T)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\underbrace{(D(R)t)}_{t'} - \underbrace{(D(R)t)^T}_{t'^T}\right) = \tfrac{1}{2}(t' - t'^T)$$
$$= t'_a \in U_a$$

da t' allgemein: $t' = t'_a + t'_s + \left(\frac{t'_{sp}}{n}\mathbb{1}\right)$ $\square$

12.2011 weiter zz.: $\frac{t_{sp}}{n}\mathbb{1} \in U_{sp} \overset{!}{\Rightarrow} D(R)\cdot(\frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}) \in U_{sp}$

$$(D(R)(\tfrac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}))^{ij} = D(R)^{ij,kl}\cdot\underbrace{\frac{t_{sp}}{n}}_{\text{Skalar}}\delta^{kl} = \frac{t_{sp}}{n}\cdot R^{ik}R^{jl}\delta^{kl}$$

| Konstruktion von kundl

$$= \frac{t_{sp}}{n}R^{il}R^{jl}$$

$$= \frac{t_{sp}}{n}\cdot R^{il}(R^T)^{lj}$$

$$= \frac{t_{sp}}{n}(RR^T)^{ij}$$

$$= \frac{t_{sp}}{n}((R^T)^T\cdot(R^T))^{ij}$$

$$= \frac{t_{sp}}{n}\cdot\delta^{ij} \checkmark$$

$$\Rightarrow D(R)\cdot\frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1} = \frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1} \in U_{sp} \square$$

weiter zz.: $t_s \in U_s \overset{!}{\Rightarrow} D(R)t_s \in U_s$

$$t_s = \frac{1}{2}(t+t^T) - \frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}$$

$$D(R)t_s = D(R)\frac{1}{2}(t+t^T) - D(R)\frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}$$

$$= D(R)\frac{1}{2}(t+t^T) - \frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}$$

$$\overset{\text{wie oben}}{=} \frac{1}{2}((D(R)t) + (D(R)t)^T) - D(R)\frac{t_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1}$$

$$\overset{D(R)t=t'}{=} \frac{1}{2}(t'+t'^T) - \frac{t'_{sp}}{n}\cdot\mathbb{1} = t'_s \in U_s \checkmark$$

da t' in der Form wie oben zerlegt werden kann $\square$

schön!