Dang Duy Thao LE, Jonathan FÖRSTE, Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Konrad HEIMPEL   Gruppe 4   Montag, 9ct

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik
Prof. Dr. A. Hebecker
S. Kraus

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2011/12

8. Übungsblatt

1	2	3	4	Σ
4,5	7	6	5,5	23

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 05.12.2011 in den Tutorien

Aufgabe 8.1 (10 Punkte):
Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ayz \\ -bxz \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $a, b =$ konst. Betrachten Sie die Mantelfläche eines Zylinders der Höhe h mit Radius R. (Die Grund- und Deckfläche zählen *nicht* zur Mantelfläche.) Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Standfläche des Zylinders die Ebene $z = 0$ ist. Seine Mittelachse falle mit der z-Achse zusammen.

(a) Parametrisieren Sie die Mantelfläche durch z und φ, wobei $x = R\cos\varphi$ und $y = R\sin\varphi$ ist. Finden Sie an jedem Punkt der Mantelfläche den Einheitsvektor, der senkrecht zur Fläche nach außen zeigt.

(b) Bilden Sie das Skalarprodukt dieses Vektors mit dem Vektorfeld rot $\vec{F}$ an jedem Punkt der Mantelfläche.

(c) Integrieren Sie das Skalarprodukt aus Teilaufgabe (b) über die Mantelfläche. Benutzen Sie hierzu, wie schon oben, die Parametrisierung des Zylinders

$$\vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

und schreiben Sie das Oberflächenelement $\mathrm{d}A$ als $\mathrm{d}A = f(R)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$, d.h. finden Sie die Funktion $f(R)$. Erinnern Sie sich zunächst daran, wie Sie mit Hilfe der Integration die Bogenlänge eines Kreisbogens mit Radius R berechnen.

(d) Integrieren Sie außerdem $\vec{F}$ über den (aus zwei Kreisen bestehenden) Rand der Mantelfläche. Beachten Sie dabei das relative Vorzeichen der beiden Teilergebnisse.

(e) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben (c) und (d) und interpretieren Sie das Resultat mittels des Satzes von Stokes.

Aufgabe 8.2 (8 Punkte):

(a) Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie der Vektor $r = (x, y, 0)^T$ in der (xy)-Ebene. Wie muss die Matrix A lauten, die den Vektor r in der (xy)-Ebene um einen Winkel φ dreht? (Hinweis: Sei r' der gedrehte Vektor. Berechnen Sie r'^2 und $r \cdot r'$.) Wie lautet dann die Matrix B, die diese Drehung wieder rückgängig macht? Berechnen Sie die Determinanten von A und B.

2011 Theoretische Physik I

8. Übungsblatt

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ayz \\ -bxz \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a,b = \text{const.}$$

Zylinder mit Höhe h und Radius R

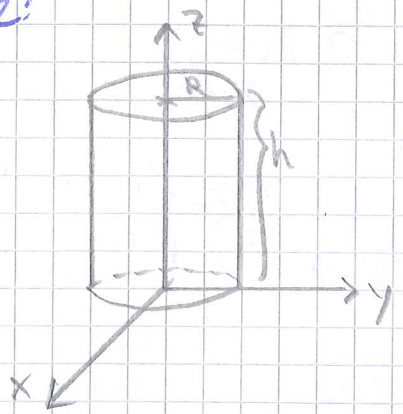
Standfläche fällt auf Ebene $z=0$ bzw. auf xy-Ebene

Mittelachse fällt mit z-Achse zusammen

(a)

$$\vec{x}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \checkmark$$

Skizze:



Der Radius wird mit $\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Der „Radiusvektor" ist der Normalenvektor zu jedem Punkt auf der Mantelfläche.

$$\left| \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2} = \sqrt{R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = R$$

da $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$\Rightarrow \vec{n}_0$ ... Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R} = \underline{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} \checkmark$$

(b) $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ayz \\ -bxz \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-(-bx) \\ ay-0 \\ -bz-az \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} bx \\ ay \\ z(-b-a) \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Parametrisierung

$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x})) = bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = aR\cos^2\varphi + bR\sin^2\varphi$

$-0{,}5$

(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^h (bx\cdot\cos\varphi + ay\sin\varphi)\,dx\cdot dy$

Bem.: $dx \cdot dy = dA = f(R)\,d\varphi\,dz$

$f(R) = R$

$\Rightarrow dA = R\,d\varphi\,dz$ ✓

x & y einsetzen!

-1

$x = R\cos\varphi$

$y = R\sin\varphi$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^h (bx\cdot\cos\varphi + ay\sin\varphi)\,dA$

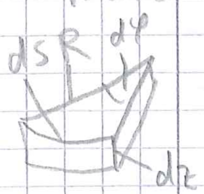
$= \int_0^{2\pi}\int_0^h (bx\cos\varphi + ay\sin\varphi)\cdot R\,d\varphi\,dz$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^h (Rbx\cos\varphi + Ray\sin\varphi)\,d\varphi\,dz$

$= \int_0^h [-Rbx\sin\varphi - Ray\cos\varphi]_0^{2\pi}\,dz = -R^2 \int_0^h (b\sin^2(\varphi) + a\cos^2(\varphi))\Big|_0^{2\pi} dz$

Zylindergrundschnitt

$ds = R\cdot d\varphi\,dz$



$= \int_0^h (-Ray)\,dz$

$= [-Rayz]_0^h$

$= -Ray\cdot h$

(d), (e): schlechtes Zeitmanagement. Sorry!

-4

Es gilt: $\underline{r' = A \cdot r}$

8.2 a) $(x^2+y^2)\cos\varphi = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \underbrace{(a_{12}+a_{21})}_{=0}xy$ ← Folgt aus $r \cdot r' = r \cdot r \cdot \cos\varphi$ wg. Skalarprod.

✓

$\Rightarrow a_{11} = \cos\varphi$

$a_{22} = \cos\varphi$ $\qquad a_{12} = -a_{21}$

$x^2+y^2 = (a_{11}^2 + a_{21}^2)x^2 + (2a_{11}a_{12} + 2a_{21}a_{22})xy + (a_{12}^2 + a_{22}^2)y^2$

Folgt aus $r'^2 = r^2$ wg. Betragsgleichheit

✓

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 & \Rightarrow \cos^2\varphi + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 & \quad\;\; \cos^2\varphi + a_{12}^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{21}, a_{12} = \pm\sin\varphi$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ → Einsetzen von $-\varphi$ in A; und es gilt $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

✓

$\underline{\det(A) = 1}$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$-(0 + (-(-\sin^2\varphi)) + 0) + (\cos^2\varphi + 0 + 0)$ ✓

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$\underline{\det(B) = 1}$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$-(-\sin^2\varphi + 0 + 0) + \cos^2\varphi + 0 + 0$ ✓

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Aufgabe 8.2

(b)

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&4&1\\1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}6&5\\2&3\end{pmatrix}}}$$ -0,5

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1&2\\ & & & 1&0\\ & & & 1&1\\ \hline 1&2&3&6&5\\ 2&1&-1&2&3\end{array}$$

$$E\cdot F=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4&1\\1&2&1\\2&0&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}9&14&7\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}}}$$ ✓

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1&4&1\\ & & & 1&2&1\\ & & & 2&0&1\\ \hline 2&3&2&9&14&7\\ 0&1&-1&-1&2&0\\ 0&0&1&2&0&1\end{array}$$

$$F\cdot E=\begin{pmatrix}1&4&1\\1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2&7&-1\\2&5&1\\4&6&5\end{pmatrix}}}$$ -0,5

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2&3&2\\ & & & 0&1&-1\\ & & & 0&0&1\\ \hline 1&4&1&2&7&-1\\ 1&2&1&2&5&1\\ 1&0&1&2&3&3\end{array}$$

$\det(E)=2$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} 3&2&2&3&2&2&3\\ 1&-1&0&1&-1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0\end{array}$$

$-(0+0+0)+2+0+0$

$\det(F)=2$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} 4&1&1&4&1&1&4\\ 2&1&1&2&1&1&2\\ 0&1&2&0&1&2&0\end{array}$$

$-(0+4+4)+2+8+0$

$\det(EF)=4$

$$\begin{array}{cc|ccc|cc} 14&7&9&14&7&9&14\\ 2&0&-1&2&0&-1&2\\ 0&1&2&0&1&2&0\end{array}$$

$-(0+(-14)+28)+18+0+0$

✓

3a)

$A(\vec{b},\vec{c}) \mathrel{\hat{=}}$ ~~Fläche der~~ Inhalt der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogrammfläche

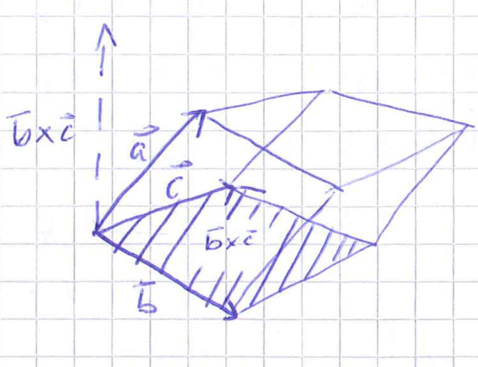
$$A(\vec{b},\vec{c}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\theta = |\vec{b}\times\vec{c}|$$

Ein Spat hat eine Ausdehnung in die 3. Dimension um einen Faktor α.
Da das Skalarprodukt einen Vektor ~~mit~~ streckt kann man das Volumen in 3 Dimensionen durch Multiplikation mit einem Dritten Vektor erhalten

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = A(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

warum ist das genau $\vec{a}^2$?
-0,5

Der Betrag muss gebildet werden, da das Volumen positiv sein muss.
Die Betragsstriche bei $\vec{b}\times\vec{c}$ sind unnötig da gilt: $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = |\vec{a}\cdot|\vec{b}\times\vec{c}||$



b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Regel von Sarrus}}{=} a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 - c_1 b_2 a_3$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_2 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}} \quad \square$$

Vertauschung von Vektoren

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

1) $\vec{a}$ mit $\vec{b}$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = b_1 a_2 c_3 - b_1 a_3 c_2 + b_2 a_3 c_1 - b_2 a_1 c_3 + b_3 a_1 c_2 - b_3 a_2 c_1$$

$$= a_1 b_3 c_2 - a_1 b_2 c_3 + a_2 b_1 c_3 - a_2 b_3 c_1 + a_3 b_2 c_1 - a_3 b_1 c_2 = -(\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}))$$

2) $\vec{c}$ mit $\vec{b}$ Kreuzprodukt ist antisymmetrisch

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot -(\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$

3) $\vec{c}$ mit $\vec{a}$ $\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -(\vec{b}(\vec{c} \times \vec{a})) = -(-(\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})))$

$$= -(-(-(\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})))) = -(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$$

$\Rightarrow$ Vertauschung ergibt immer das Inverse ändert das VZ!

3c)

0) $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)}$

1) $\Rightarrow$ in jedem Summanten ist ein Eintrag jeder Spalte enthalten (σ ist bijektiv)

2) $\Rightarrow$ ist eine Spalte komplett 0

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{n1} & & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

So ist die Determinante ebenfalls 0

3)
$$\det A^{M} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i} + \lambda a_{1j}) & a_{1j} & a_{1n} \\ \vdots & & (a_{2i} + \lambda a_{2j}) & a_{2j} & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni} + \lambda a_{nj}) & a_{nj} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdots (a_{xi} + \lambda a_{xj}) \cdot a_{yj} \cdots a_{nn} \pm \cdots$$
$$\pm a_{1n} \cdots (a_{yi} + \lambda a_{yj}) \cdot a_{xj} \cdots a_{n1}$$

$$= (a_{11} \cdots a_{xi} + a_{yj} \cdots a_{nn} \pm a_{1n} \cdots a_{yi}\, a_{xj} \cdots a_{nn})$$

$$+ (a_{11} \cdot h a_{xj} \cdot a_{yj} \cdots a_{nn} \pm a_{1n} \cdot h a_{yj} \cdot a_{xj} \cdots a_{n1})$$

bessere Begründung auf nächster Seite :)

$\Rightarrow = \det A$

was ist h?

~~-0,5~~

$$\Rightarrow = h\,\underbrace{(a_{11} \cdots a_{xj}\, a_{yj} \cdots a_{nn} \pm a_{1n}\, a_{xj}\, a_{xj} \cdots a_{nm}) \quad \boxed{\pm \cdots + a}}_{=0}$$

warum?

$$\Rightarrow \;=\; \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Wenn eine Komponente (Vektor) durch einen anderen darstellbar ist, dann kann man das Inverse addieren. Damit gibt es eine 0-Spalte.
~~Es~~ Da die Determinante dieser Kombination 0 ist und sie wie gezeigt allen anderen Determinanten gleicht in dessen Matrix Vielfache von Komponenten addiert sind ist sie immer $\underline{0}$.

$\square$

d) Lässt sich ein Vektor a_1 aus Linearkombination der anderen darstellen gilt oBdA:

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n$$

Man kann wie in c) aus entsprechender Faktorisierung das Inverse addieren und erhält eine 0-Spalte. Die Determinante wird dadurch nicht verändert und ist $= \underline{0}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Sei $a_1 = \alpha b_1 + \beta c_1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha b_2 + \beta c_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha b_3 + \beta c_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} (\alpha b_1 + \beta c_1) + (-\alpha b_1) + (-\beta c_1) & b_1 & c_1 \\ (\alpha b_2 + \beta c_2) + (-\alpha b_2) + (-\beta c_2) & b_2 & c_2 \\ (\alpha b_3 + \beta c_3) + (-\alpha b_3) + (-\beta c_3) & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{matrix}$$

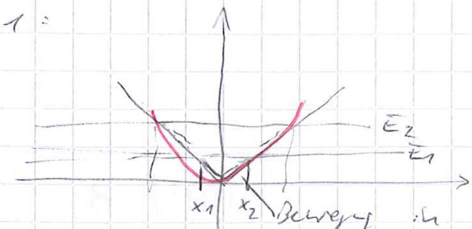
nach Sarrus

$$= 0\, b_2\, c_3 + b_1\, c_2\, 0 + c_1\, 0\, b_3 - b_1\, 0\, c_3 - 0\, c_2\, b_3 - c_2\, b_2\, 0$$

$$= 0$$

4. Gegeben: $V(x) = A|x|^n$; Gesucht $T(E)$

Skizze für $n=1$:



Bewegung in diesem Bereich möglich

T entspricht der Dauer einer Periode, d.h. einer Bewegung von x_1 nach x_2 und zurück.

Aus Symmetriegründen ist das gleich viermal einer Bewegung von 0 nach x_2. (wg. Betrag gilt stets Symmetrie).

Wegen Energieerhaltung gilt stets $E = T + V$

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (allgemeine eindimensionale Bewegung.)

Daraus folgt $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + A|x|^n \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot(E - A|x|^n)} = \frac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow dt = dx \Big/ \sqrt{\frac{2}{m}(E-A|x|^n)}$$

$$\Rightarrow t = \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-A|x|^n)}}$$

Wie oben beschrieben, ist $T = 4\cdot t\Big|_0^{x_2}$

x_2: $V(x_2) = E = A|x_2|^n \Leftrightarrow |x_2|^n = \frac{E}{A} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}$

$$\Rightarrow T = 4\cdot\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-A|x|^n)}} = 4\sqrt{m}\cdot\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-A|x|^n}} = 4\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{A}{E}|x|^n}}$$

Substituiere $|x| = |x_2|y \Rightarrow y(x) = \frac{|x|}{|x_2|}$ $\qquad \frac{dx}{dy} = x_2$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{m}{2E}}\cdot\int_0^{y(x_2)=1}\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{A}{E}\cdot|x_2 y|^n}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \neq 1!$$

-0,5

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^1 \cdot x_2\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{A}{E}|x_2 y|^n}}$$

(Einsetzen von $|x_2| = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}$)

$$= \sqrt{\frac{m}{E}}\sqrt[n]{\frac{E}{A}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{A}{E}\cdot\frac{E}{A}(y)^n}} = \sqrt{\frac{m}{E}}\cdot\sqrt[n]{\frac{E}{A}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

Substituiere $t := y^n$; $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt[n]{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}-1}\cdot dt = \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$$

Wo ist die 4? und die 2?

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{8m}{E}}\cdot\sqrt[n]{\frac{E}{A}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\cdot\sqrt{\frac{m}{E}}\cdot\sqrt[n]{\frac{E}{A}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})}$$