

Gruppe 4 Konrad Heimpel

6. ÜBUNGSBLATT

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 21.11.2011 in den Tutorien

Aufgabe 6.1 (8 Punkte):

Das Potential des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$V(\vec{x}) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2$$

1	2	3	4	5	Σ
2	4	6	6	6	30

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $A_i, B_i, i = 1, 2, 3$.

- Berechnen Sie die spezielle Lösung des Anfangswertproblems $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0, \dot{\vec{x}}(t=0) = \vec{v}_0$.
- Zeigen Sie durch Einsetzen, dass das so gefundene $\vec{x}(t)$ tatsächlich die Bewegungsgleichungen erfüllt.

Berechnen Sie nun die durch die Teilchenbewegung bedingte zeitliche Änderung des Potentials $V(\vec{x})$ für einen beliebigen Zeitpunkt t auf zwei verschiedene Arten:

- Setzen Sie zunächst die Lösung $\vec{x}(t)$ in $V(\vec{x})$ ein. $V(\vec{x}(t))$ ist nun eine Funktion der Zeit, die Sie total nach t differenzieren können.
- Berechnen Sie $dV(\vec{x}(t))/dt$ mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Rechenregel

$$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} = (\nabla V)(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Vergewissern Sie sich, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte):

Berechnen Sie die Differenz $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ für kleine $\Delta x, \Delta y$. Nutzen Sie dazu den Trick aus der Vorlesung, der bei der Herleitung der Rechenregel aus Aufgabe 6.1 Verwendung fand, sowie die in der Vorlesung besprochene Taylor-Entwicklung. Vernachlässigen Sie alle Terme die quadratisch oder in noch höherer Ordnung von $\Delta x, \Delta y$ abhängen. Am Ende sollten alle Ableitungen von f am Punkt (x_0, y_0) ausgewertet werden.

BITTE WENDEN

Aufgabe 6.3 (6 Punkte):

Verifizieren Sie den Satz von Stokes an folgendem Beispiel, indem Sie sowohl das Kurvenintegral als auch das Flächenintegral auswerten: Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ sei gegeben durch

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2z \end{pmatrix}$$

Als Integrationsbereich wählen Sie das Quadrat dessen Ecken sich an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

befinden. Fassen Sie das Integral über die Fläche einfach als Produkt zweier Integrale auf.

Aufgabe 6.4 (6 Punkte):

Betrachten Sie das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}, \quad \alpha, \beta > 0$$

für $x > 0$. Berechnen Sie die ersten zwei Terme der Taylor-Entwicklung des Potentials um das Minimum. Berechnen Sie anschließend die Kreisfrequenz ω der Schwingung eines Teilchens der Masse m bei kleinen Auslenkungen um die Ruhelage.

Aufgabe 6.5 (6 Punkte):

Ein Keil liegt rutschfest auf einer Waage so, dass seine Oberfläche eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α darstellt. Auf dieser Oberfläche befindet sich, irgendwie befestigt, eine Masse m . Die Waage zeigt ihr Gewicht an. Nun wird die Befestigung gelöst und die Masse gleitet reibungslos die schiefe Ebene hinab. Ändert sich die Anzeige der Waage? Und wenn ja, wie?

11 Theoretische Physik I

6. Wüchsblatt

Aufgabe 6.1

$$U(\vec{x}) = \frac{m}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix} \quad \text{mit Konstanten } A_i, B_i, i=1,2,3$$

a) $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(t=0) = \vec{v}_0$

$$\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \checkmark$$

da:
 $\sin(0) = 0$
 $\cos(0) = 1$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - B_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ A_3 \omega_3 \cos(\omega_3 t) - B_3 \omega_3 \sin(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

da:
 $\sin(0) = 0$
 $\cos(0) = 1$

$$\dot{\vec{x}}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \\ v_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \omega_1 \\ A_2 \omega_2 \\ A_3 \omega_3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_0^1}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t) + x_0^1 \cdot \cos(\omega_1 t) \\ \frac{v_0^2}{\omega_2} \cdot \sin(\omega_2 t) + x_0^2 \cdot \cos(\omega_2 t) \\ \frac{v_0^3}{\omega_3} \cdot \sin(\omega_3 t) + x_0^3 \cdot \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

b) $\ddot{x} = -\omega^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

hier: $\ddot{\vec{x}} = -\omega_i^2 \vec{x} \Leftrightarrow \ddot{\vec{x}} + \omega_i^2 \vec{x} = 0$ mit $i=1,2,3$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -A_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) - B_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ -A_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) - B_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ -A_3 \omega_3^2 \sin(\omega_3 t) - B_3 \omega_3^2 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

aus $\ddot{x} + \omega_i^2 x = 0$ folgt:

$$\begin{pmatrix} -A_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) - B_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ -A_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) - B_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ -A_3 \omega_3^2 \sin(\omega_3 t) - B_3 \omega_3^2 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ A_3 \omega_3^2 \sin(\omega_3 t) + B_3 \omega_3^2 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix} = 0$$

da $\omega^2 \cdot \vec{x} = \omega_i^2 \cdot \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \\ A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ A_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ A_3 \omega_3^2 \sin(\omega_3 t) + B_3 \omega_3^2 \cos(\omega_3 t) \end{pmatrix}$

mit $A_i = \frac{v_0^i}{\omega_i}, B_i = x_0^i$ mit $i=1,2,3$ \checkmark

$$c) V(\vec{x}) = \frac{m}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2 \quad V(\vec{x}(t)) = \frac{m}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 \cdot (A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t))^2$$

allg.

$$\frac{dV(\vec{x}(t))}{dt} = \frac{m}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 2\omega_i^2 (A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)) \cdot (A_i \omega_i \cos(\omega_i t) - B_i \omega_i \sin(\omega_i t))$$

$$= m \cdot \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 (A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)) \cdot (A_i \omega_i \cos(\omega_i t) - B_i \omega_i \sin(\omega_i t))$$

$$= m \cdot (\omega_1^2 (A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)) \cdot (A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - B_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t))$$

$$+ \omega_2^2 (A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t)) \cdot (A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t))$$

$$+ \omega_3^2 (A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t)) \cdot (A_3 \omega_3 \cos(\omega_3 t) - B_3 \omega_3 \sin(\omega_3 t))$$

d) $(\nabla V)(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$

$$V(\vec{x}) = \frac{m}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2 = \frac{m}{2} \cdot (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2)$$

$$\nabla V = \frac{m}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \omega_1^2 x_1 \\ 2 \cdot \omega_2^2 x_2 \\ 2 \cdot \omega_3^2 x_3 \end{pmatrix} = m \cdot \text{Vekt} \begin{pmatrix} x_1 \omega_1^2 \\ x_2 \omega_2^2 \\ x_3 \omega_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m x_1 \omega_1^2 \\ m x_2 \omega_2^2 \\ m x_3 \omega_3^2 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla V)(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} m \omega_1^2 (A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)) \\ m \omega_2^2 (A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t)) \\ m \omega_3^2 (A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t)) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - B_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) \\ A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \\ A_3 \omega_3 \cos(\omega_3 t) - B_3 \omega_3 \sin(\omega_3 t) \end{pmatrix}$$

$$(\nabla V)(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 m \omega_i^2 (A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)) \cdot (A_i \omega_i \cos(\omega_i t) - B_i \omega_i \sin(\omega_i t))$$

$$= \sum_{i=1}^3 m \omega_i^2 (A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)) \cdot (A_i \omega_i \cos(\omega_i t) - B_i \omega_i \sin(\omega_i t))$$

$$= m \cdot (\omega_1^2 (A_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \cos(\omega_1 t)) \cdot (A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - B_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t))$$

$$+ \omega_2^2 (A_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t)) \cdot (A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t))$$

$$+ \omega_3^2 (A_3 \sin(\omega_3 t) + B_3 \cos(\omega_3 t)) \cdot (A_3 \omega_3 \cos(\omega_3 t) - B_3 \omega_3 \sin(\omega_3 t))$$

Anmerkung: Die Ergebnisse in c) und d) stimmen überein.

Es wurde das Summenglied verwendet, da sich die Faktoren unterschiedlicher Komponenten nicht nur in ihren Indizes unterscheiden.

Aufgabe 6.2

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Taylorentwicklung von $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ an der Stelle x_0 :

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0 + \Delta y) + \frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \cdot (x_0 + \Delta x - x_0) + O(\Delta^2)$$

Taylorentwicklung von $f(x_0, y_0 + \Delta y)$ bei y_0 :

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y_0 + \Delta y - y_0) + O(\Delta^2)$$

Einsetzen in obigen Term:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)$$

Taylorentwicklung für $\frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x}$ bei y_0 :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \underbrace{\Delta x \cdot \Delta y}_{\Delta x O(\Delta^2)} + \Delta x O(\Delta^2)$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + O(\Delta^2) \\ \Rightarrow = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + O(\Delta^2)$$

✓

Aufgabe 6.3

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3y \\ 4yz \\ 3x^2z \end{pmatrix}$$

Kurvenintegral:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{(1,0,0)}^{(1,1,0)} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{(0,1,0)}^{(1,1,0)} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} - \int_{(0,0,0)}^{(0,1,0)} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= 0, \text{ da } z=0 \quad \checkmark \qquad \qquad \qquad = 0, \text{ da } z=0 \end{aligned}$$

Parametrisierung ergibt:

$$\int_0^1 2t^2 dt + 0 - \int_0^1 2t^2 - 3t dt - 0 = \int_0^1 3 dt = \underline{\underline{3}}$$

Flächenintegral nach Stokes:

$$\int_A d\vec{A} (\nabla \times \vec{F}) = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \overset{\text{Betrag von } d\vec{A}}{dy \cdot dx} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \overset{\text{Richtung von } d\vec{A}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 4y \\ 0 - 6xz \\ 0 + 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_A = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 dy \cdot dx \cdot \begin{pmatrix} -4y \\ -6xz \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 3 dy dx = \underline{\underline{3}} \quad \checkmark$$

Aufgabe 6.4

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$V(x) = -\alpha \cdot (x)^{-1} + \beta (x)^{-2}$$

Sehr beliebt in Klausuren!

$$V'(x) = \alpha (x)^{-2} - 2\beta (x)^{-3}$$

$$V''(x) = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{6\beta}{x^4}$$

Minimum berechnen: erste Ableitung = 0

$$\alpha x_0^{-2} - 2\beta x_0^{-3} = 0 \quad | + 2\beta x_0^{-3}$$

$$\alpha x_0^{-2} = 2\beta x_0^{-3} \quad | \cdot x^3$$

$$\alpha x_0 = 2\beta \quad | : \alpha$$

$$x_0 = \frac{2\beta}{\alpha} \quad \checkmark$$

Taylorentwicklung:

$$V(x = x - x_0) = V(x_0) + V'(x_0) \cdot x + \frac{1}{2} V''(x_0) \cdot x^2$$

$$V(x_0) = -\frac{\alpha^2}{4\beta}; \quad V'(x_0) = 0; \quad V''(x_0) = \frac{\alpha^4}{8\beta^3} \quad \checkmark$$

$$V(x) \approx -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{\alpha^4}{16\beta^3} x^2 \quad \checkmark$$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\alpha^4}{8\beta^3} x$$

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{\alpha^4}{8\beta^3} x$$

$$x(t) = A \cdot e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}(t) = A i \omega \cdot e^{i\omega t} = i \omega x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cdot e^{i\omega t} = -\omega^2 x(t) \quad | i^2 = -1$$

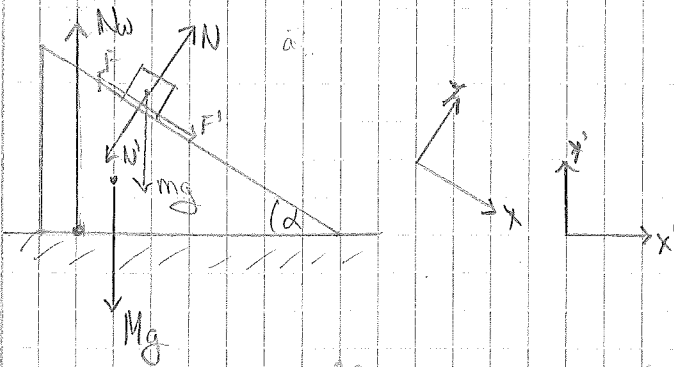
$$\Rightarrow m \cdot (-\omega^2 x) = -\frac{\alpha^4}{8\beta^3} x \quad | : x$$

$$-m\omega^2 = -\frac{\alpha^4}{8\beta^3} \quad | : -m \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha^4}{8\beta^3 m}} \quad \checkmark$$

Aufgabe 6.5

1. Fall: $t=0$



Die Waage zeigt den Betrag N_w an.
 F ... Kraft von Auflage auf Masse
 F' ... Kraft von Auflage auf Keil

Da sich die Auflage in Ruhe befindet gilt:

$$F = F'$$

N ... Normalkraft von Keil auf Masse

N' ... Normalkraft von Masse auf Keil

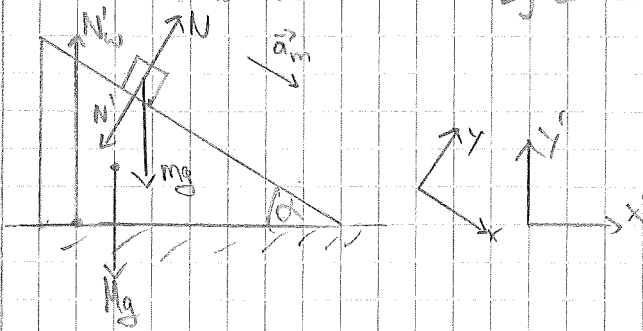
$$N = N' \quad (\text{3. Newton'sches Axiom})$$

$$\begin{aligned} x: F &= m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ y: N &= m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Masse}$$

Keil $y: N_w = N' \cos \alpha + F' \sin \alpha + Mg$
 $\Rightarrow N_w = N \cos \alpha + F \sin \alpha + Mg$
 $= m \cdot g \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + Mg = (m+M) \cdot g$ ✓

da $N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$
 und $F = m \cdot g \cdot \sin \alpha$

2. Fall: Masse wird losgelassen



Die Waage zeigt den Betrag von N'_w an.

$$\begin{aligned} x: m \cdot a_m &= m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ y: N - m \cdot g \cdot \cos \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Masse}$$

Keil $y: N'_w - Mg - N' \cos \alpha = 0$
 $N' = N$

$$\Rightarrow N'_w = Mg + N \cos \alpha = Mg + m \cdot g \cdot \cos^2 \alpha = (M + m \cos^2 \alpha) \cdot g$$

$$\Rightarrow (M + m \cos^2 \alpha) \cdot g < (m+M) \cdot g$$

\Rightarrow Ja, die Anzeige ändert sich; die Anzeige wird kleiner.