Theoretische Physik I: Klassische Mechanik
Prof. Dr. A. Hebecker
S. Kraus

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2011/12

5. Übungsblatt

1	2	3	4	Σ
8	7,5	4	4	23,5

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 14.11.2011 in den Tutorien

Aufgabe 5.1 (10 Punkte):
Zeigen Sie, dass

a) $\nabla f(r) = \frac{\vec{x}}{r}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$ $r = r(\vec{x})$

b) $\nabla(gh) = (\nabla g)h + g(\nabla h)$

und berechnen Sie

c) ∇r^n

d) $\nabla \ln r$

e) $\nabla\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{r^3}\right)$

Dabei sei $r \equiv |\vec{x}|$. Weiterhin seien f, g und h differenzierbare Funktionen von $\vec{x}$ und $\vec{a}$ sei ein konstanter Vektor.

Aufgabe 5.2 (8 Punkte):
Gegeben seien zwei Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ x(y-1) \\ x - yz^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -6z \\ 4z \\ 4y - 6x \end{pmatrix}$$

a) Prüfen Sie, ob die Felder konservativ sind.

b) Berechnen Sie die Arbeit W_i, $i = 1, 2$, die von außen am System verrichtet werden muss, um ein Teilchen im Kraftfeld $\vec{F}_i(\vec{x})$ entlang einer Geraden vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$ zu bringen.

c) Berechnen Sie die Arbeit W_i, $i = 1, 2$, die von außen am System verrichtet werden muss, um ein Teilchen im Kraftfeld $\vec{F}_i(\vec{x})$ entlang der bzw. parallel zu den Koordinatenachsen vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$ zu bringen. D.h. bringen Sie das Teilchen jeweils entlang einer Geraden von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 0)$, dann von $(1, 0, 0)$ nach $(1, 1, 0)$ und zuletzt von $(1, 1, 0)$ nach $(1, 1, 1)$.

d) Bestimmen Sie, falls möglich, die Potentiale der Kraftfelder.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte):
Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die Differentialgleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$m\ddot{x} = F(x)$$

mit $F(x) = -m\omega^2 x$ die allgemeine Lösung $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ hat. Berechnen Sie die Gesamtenergie des Systems und zeigen Sie durch Einsetzen der allgemeinen Lösung, dass diese konstant ist.

Bitte wenden

Aufgabe 5.4 (8 Punkte):
In einem Spaßbad rutscht ein Massepunkt reibungsfrei eine spiralförmige Rutschbahn hinunter. Die Spirale habe den Radius R und vollführe drei volle Umdrehungen auf einem Höhenunterschied h. Die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens relativ zur Rutschbahn sei null. Berechnen Sie die Trajektorie $\vec{x}(t)$ in einem geeignet gewählten Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu den Energieerhaltungssatz.

Theoretische Physik 1: Übungsblatt 5.

5.1 (a) $\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x^1}, \frac{\partial f(r)}{\partial x^2}, \frac{\partial f(r)}{\partial x^3} \right)$

$$= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^1}, \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^2}, \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^3} \right)$$

$$= \frac{d f(r)}{dr} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x^1}, \frac{\partial r}{\partial x^2}, \frac{\partial r}{\partial x^3} \right)$$

$$= \frac{d f(r)}{dr} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \right)$$

NR: $\frac{\partial}{\partial x^i} \underbrace{\sqrt{x^i x^i}}_{= r} = \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{z} = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{z}} \cdot \cancel{2} x^i = \frac{x^i}{\sqrt{z}} = \cancel{\ldots} = \frac{x^i}{r}$

$z := x^i x^i$

Damit gilt:

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{d f(r)}{dr} \left(\frac{x^1}{r}, \frac{x^2}{r}, \frac{x^3}{r} \right) = \frac{d f(r)}{dr} \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad \square$$

(b) $\vec{\nabla}(gh) = \left(\frac{\partial (gh)}{\partial x^1}, \frac{\partial (gh)}{\partial x^2}, \frac{\partial (gh)}{\partial x^3} \right)$

$$\overset{\text{Produktregel}}{=} \left(\frac{\partial g}{\partial x^1} \cdot h + \frac{\partial h}{\partial x^1} \cdot g, \frac{\partial g}{\partial x^2} \cdot h + \frac{\partial h}{\partial x^2} \cdot g, \frac{\partial g}{\partial x^3} h + \frac{\partial h}{\partial x^3} g \right)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x^1} \cdot h, \frac{\partial g}{\partial x^2} \cdot h, \frac{\partial g}{\partial x^3} \cdot h \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x^1} \cdot g, \frac{\partial h}{\partial x^2} \cdot g, \frac{\partial h}{\partial x^3} \cdot g \right)$$

$$= h \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \frac{\partial g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial x^3} \right) + g \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x^1}, \frac{\partial h}{\partial x^2}, \frac{\partial h}{\partial x^3} \right)$$

$$= h \cdot (\vec{\nabla} g) + g \cdot (\vec{\nabla} h) \quad \square$$

(c) $\vec{\nabla} r^n = \left(\frac{\partial r^n}{\partial x^1}, \frac{\partial r^n}{\partial x^2}, \frac{\partial r^n}{\partial x^3} \right)$

NR: $\frac{\partial r^n}{\partial x^i} = \frac{\partial \sqrt{x^i x^i}^{\,n}}{\partial x^i}$; setze $z := x^i x^i$

$$\frac{\partial r^n}{\partial x^i} = \frac{\partial \sqrt{z}^{\,n}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{\partial z^{\frac{n}{2}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x^i}$$

$$= \frac{n}{\cancel{2}} z^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \cdot \cancel{2} x^i$$

$$= x^i \cdot n \cdot z^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

$$= x^i \cdot n \cdot \sqrt{z}^{\,(n-2)}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} r^n = \left(x^1 \cdot n \sqrt{z}^{\,(n-2)}, x^2 \cdot n \cdot \sqrt{z}^{\,(n-2)}, x^3 \cdot n \cdot \sqrt{z}^{\,(n-2)} \right)$$

$$= n \sqrt{z}^{\,(n-2)} \cdot (\vec{x}) = n r^{(n-2)} \cdot (\vec{x})$$

(d) $\vec{\nabla} \ln|\vec{r}| = \left(\frac{\partial \ln(r)}{\partial x^1}, \frac{\partial \ln(r)}{\partial x^2}, \frac{\partial \ln(r)}{\partial x^3} \right)$

$$= \left(\frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^1}, \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^2}, \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^3} \right)$$

$$= \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{x}}{r} \quad \text{(siehe (a))}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{x}}{r^2}$$

(e) $\nabla \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{r^3} \right) = \vec{a} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \frac{x^1}{r^3}, \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{x^2}{r^3}, \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{x^3}{r^3} \right)$

Kettenregel gilt für skalare Funktionen!

$$\cancel{= \vec{a} \cdot \left((\vec{\nabla} \vec{x}) \cdot \frac{1}{r^3} + \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{x} \right)} \qquad \cancel{\text{NR: } \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \vec{\nabla} r^{-3} = -3 \cdot r^{-5} \cdot \vec{x}}$$

$$\cancel{= \vec{a} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{r^3} - 3 r^{-5} \cdot \vec{x} \cdot \vec{x} \right)}$$

$$\cancel{= \vec{a} \, \frac{1}{r^3} (a_1 + a_2 + a_3) -}$$

NR: $a^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{x^i}{r^3} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot x^i \right) \cdot \frac{1}{r^3} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{r^3} \right) \cdot x^i \right) \cdot a^i$

$$= a^i \cdot \frac{1}{r^3} - 3 x^i \cdot \frac{1}{r^5} \cdot a^i$$

$$= a^i \cdot \left(\frac{1}{r^3} - 3 x^i \cdot \frac{1}{r^5} \right)$$

$$= \vec{a} \left(a^1 \cdot \left(\frac{1}{r^3} - 3x^1 \cdot \frac{1}{r^5} \right), a^2 \left(\frac{1}{r^3} - 3x^2 \cdot \frac{1}{r^5} \right), a^3 \left(\frac{1}{r^3} - 3x^3 \cdot \frac{1}{r^5} \right) \right)$$

$$= \vec{a} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \vec{a} \, \frac{3}{r^5} \cdot \vec{x}$$

$$= \frac{1}{r^5} \left(r^2 \vec{a} - 3 \vec{x} (\vec{a} \cdot \vec{x}) \right) \qquad -2$$

5.2 $\not\!\!\!\!\!\!\!\!$ (a)

$$\bar{F}_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ x(y-1) \\ x - yz^2 \end{pmatrix} \qquad \bar{F}_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -6z \\ 4z \\ 4y - 6z \end{pmatrix}$$

(a) Konservativität:

$$\bar{\nabla} \times \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} \partial^2 F_1{}^3 - \partial^3 F_1{}^2 \\ \partial^3 F_1{}^1 - \partial^1 F_1{}^3 \\ \partial^1 F_1{}^2 - \partial^2 F_1{}^1 \end{pmatrix}$$

-0,5

$$= \begin{pmatrix} -z^2 \\ -2z-1 \\ \cancel{+} y - 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \bar{F}_1 \text{ ist nicht konservativ.}$$

~~2xy~~

$$\bar{\nabla} \times \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} \partial^2 F_2{}^3 - \partial^3 F_2{}^2 \\ \partial^3 F_2{}^1 - \partial^1 F_2{}^3 \\ \partial^1 F_2{}^2 - \partial^2 F_2{}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ (-6)-(-6) \\ 0-0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \bar{F}_2 \text{ ist konservativ.}$$

(b) Methode: Sei $d\bar{x}$ ein infinitesimal kleiner Teil der Strecke.

Es gilt: $W = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \bar{F}(\bar{x})\, d\bar{x}$

Parametrisiere $\bar{x}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ((1,1,1) ist Endpunkt) mit $t \in [0;1]$

Dann: $W = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}(\bar{x}(t)) \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot dt$

$$-W_1 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_1(\bar{x}(t)) \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} F_1{}^1(\bar{x}(t))\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_1{}^2(\bar{x}(t)) \cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} F_1{}^3(\bar{x}(t)) \cdot dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} t^2 - t^2\, dt + \int_{t_0}^{t_1} t \cdot (t-1)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} t - t^3\, dt$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{3} t^3\right]_{t_0}^{t_1} - \left[\frac{1}{2} t^2\right]_{t_0}^{t_1} + \left[\frac{1}{2} t^2\right]_{t_0}^{t_1} - \left[\frac{1}{4} t^4\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

$$-W_2 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_2(\bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} -6t\, dt + \int_{t_0}^{t_1} 4t\, dt + \int_{t_0}^{t_1} 4t - 6t\, dt$$

$$= \left[-3t^2\right]_{t_0}^{t_1} + \left[2t^2\right]_{t_0}^{t_1} + \left[2t^2\right]_{t_0}^{t_1} - \left[3t^2\right]_{t_0}^{t_1} = \underline{\underline{-2}}$$

(c) $W_1 = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \bar{F}_1(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \bar{F}_1(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}_3} \bar{F}_1(\bar{x})\,d\bar{x}$

mit $\bar{x}_0 = (0,0,0)$, $\bar{x}_1 = (1,0,0)$, $\bar{x}_2 = (1,1,0)$, $\bar{x}_3 = (1,1,1)$

Parametrisiere $\bar{x}_{01}(t) = t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\bar{x}_{12}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\bar{x}_{23}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$W_1 = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_1(\bar{x}_{01}(t))\,\frac{d\bar{x}_{01}}{dt}\cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_1(\bar{x}_{12}(t))\,\frac{d\bar{x}_{12}}{dt}\cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_1(\bar{x}_{23}(t))\cdot\frac{d\bar{x}_{23}}{dt}\cdot dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_1^{\,1}(\bar{x}_{01}(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_1^{\,2}(\bar{x}_{12}(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_1^{\,3}(\bar{x}_{23}(t))\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} 0\,dt + \int_{t_0}^{t_1} 1\cdot(t-1)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} 1 - 1\cdot t^2\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_{t_0}^{t_1} + \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12}$$ (vorherige Arbeit), da nicht konservativ.

wie für W_1:

$$W_2 = \int_{t_0}^{t_1} F_2^{\,1}(\bar{x}_{01}(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_2^{\,2}(\bar{x}_{12}(t))\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_2^{\,3}(\bar{x}_{23}(t))\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} 0\,dt + \int_{t_0}^{t_1} 0\,dt + \int_{t_0}^{t_1} 4\cdot 1 - 6\cdot 1\,dt$$

$$= -2\cdot\int_{t_0}^{t_1} dt = -2 = -2$$ (vorh. Arbeit), da konservativ.

(d) Potential kann nur von konservativen Feldern (also nur für F_2) berechnet werden.

Dann kann es durch eine Parametrisierung $\bar{x}(t) = t\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\bar{x}$ ermittelt werden. $(t\in[0,1])$

$$V(x,y,z) = \int_0^1 \bar{F}(\bar{x}(t))\cdot\frac{d\bar{x}}{dt}\cdot dt = \int_0^1 F(t\bar{x})\cdot\bar{x}\,dt$$

$$= x\int_0^1 F_2^{\,1}(t\bar{x})\,dt + y\int_0^1 F_2^{\,2}(t\bar{x})\,dt + z\int_0^1 F_2^{\,3}(t\bar{x})\,dt$$

$$= x\cdot\int_0^1 -6tz\,dt + y\cdot\int_0^1 4zt\,dt + z\int_0^1 4yt - 6xt\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\cdot(-6z)\cdot x\right]_0^1 + \left[y\cdot 4z\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[z\cdot(4y-6x)\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$V(\vec{x}) = -3xz + 2yz + 2yz - 3xz = \underline{-6xz + 4yz}$$ ✓

5.3. $m\ddot{x} = F(x) = -m\omega^2 \cdot x$

$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ $\quad \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$

$W = T + V$

$$V = -\int F(x)\,dx = \int m\omega^2 x\,dx = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + c$$

$$T = \frac{p^2}{2m} \;;\quad p = \int m\ddot{x}\,dt = m\dot{x} + \alpha \;;\quad T = \frac{(m\dot{x})^2 + 2\alpha m\dot{x} + \alpha^2}{2m}$$

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + c + \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \left(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right)^2 + c + \cancel{\frac{m\left(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)\right)^2}{2} + \alpha^2}$$ ✓

$$\cancel{= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2\sin^2(\omega t) + 2AB\sin(\omega t)\cos(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)\right) + c}$$
$$\cancel{+ \frac{m\left(A^2\cos^2(\omega t) - 2A\cos(\omega t)B\sin(\omega t) + B^2\sin^2(\omega t)\right) + 2\alpha\left(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)\right)}{2} + \frac{\alpha^2}{2m}}$$

Wähle $v_0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$T + V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2\sin^2(\omega t) + 2AB\sin(\omega t)\cos(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)\right) + c$$

$$+ \frac{1}{2}m \cdot \left(A^2\omega^2\cos^2(\omega t) - 2AB\omega^2\sin(\omega t)\cos(\omega t) + B^2\omega^2\sin^2(\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left(\underbrace{A^2\sin^2(\omega t) + A^2\cos^2(\omega t)} + \underbrace{B^2\sin^2(\omega t) + B^2\cos^2(\omega t)}\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \left(A^2 + B^2\right) + c = \underline{\text{const.}}$$ ✓

5.4: Koordinatensystem Zylinderkoordinaten

$\vec{x} = (R, \Theta, h)$

Nach Anfangsbedingungen: $\vec{x}(t) = (R,\ \omega(t)\cdot t,\ a\cdot t^2)$ Was ist a?

$$V(h) = -\int_{h_1}^{h_2} F\,d\vec{x} = -\int_{h_1}^{h_2} F_G\,dh = -\int_{h_1}^{h_2} m\cdot a\,dh = m\cdot a\cdot \Delta h$$

$$T = \frac{1}{2}mv(t)^2 \;;\quad v(t) = R\cdot\omega \Rightarrow T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2(t)$$

$$V + T = m\cdot a\cdot \Delta h + \frac{1}{2}m\cdot R^2\cdot\omega^2(t)$$

$\cancel{t_0: T = 0, \text{ da } v = 0 \Rightarrow W = m\cdot a\cdot h_0}$ $\quad \cancel{\frac{1}{2}R^2\omega^2 = a\cdot h_0}$

$\cancel{t_1: V = 0 \text{ da } h = 0 \Rightarrow W = \frac{1}{2}mR^2\omega^2}$

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2(t)$$

$$V = m \cdot \cancel{g} \cdot h(t) = m \cdot a^2 \cdot t^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cancel{m} R^2 \omega^2(t) + \cancel{m} \cdot a^2 \cdot t^2 = const$$

$$\frac{d}{dt} W = const$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot v^2 + a^2 \cdot t^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = \cancel{v \cdot a} \; 2 \cdot v \cdot a$$

$$\frac{d}{dt}\left(a^2 t^2\right) = 2a^2 t$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{t}{2}} \; 2va = -2a^2 t$$

$$v = -at$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = -\frac{a}{R} \cdot t$$

Somit: $\vec{x}(t) = \left(R, -\frac{a}{R} \cdot t^2, at^2\right)$

$$W_0 = m \cdot g \cdot h$$

$$W_1 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R^2 \omega_1^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$\cancel{\theta = 6\pi \Rightarrow \omega(t) \cdot t_1 = 6\pi}$$

$$\cancel{\Rightarrow t_1 = -\frac{6\pi R t_1}{a}}$$

$$\cancel{\Rightarrow a = -\frac{6\pi R t_1}{t_1} = -6\pi}$$

$$\cancel{t_1: \; at^2 = h}$$

$$\cancel{-\frac{a}{R} t^2 = 6\pi}$$

$$\cancel{-\frac{h}{R} = 6\pi}$$

$$\cancel{h = -6\pi R}$$

$$\omega t = 6\pi$$

$$at^2 = h$$

$$t = \sqrt{\frac{h}{a}} \Rightarrow 6\pi = \omega \sqrt{\frac{h}{a}}$$

$$\omega = 6\pi \cdot \sqrt{\frac{a}{h}}$$

Was ist a? -4

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = (R, \omega t, at^2)$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \left(R, 6\pi \cdot \sqrt{\frac{a}{h}} \cdot t, at^2\right)$$