Jonathan Förste
Dang Duy Thao Le
Jannis Andrija Schnitzer

12. ÜBUNGSBLATT

1	2	3	4	5	Σ
7	6	6	8	0	27

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 16.01.2012 in den Tutorien

Aufgabe 12.1 (9 Punkte):
Ein Teilchen streut am Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

$\tan = \frac{\sin}{\cos} \Rightarrow$
$\tan' = \frac{1}{\cos^2}$

(a) Bestimmen Sie den Streuwinkel $\theta(b)$ als Funktion des Stoßparameters b, indem Sie das in der Vorlesung hergeleitete Integral für das angegebene Potential auswerten.

(b) Überprüfen Sie das Ergebnis durch eine geometrische Überlegung, indem Sie die obige Anordnung mit der elastischen Streuung eines Massepunktes an einer ruhenden unbeweglichen Kugel mit Radius R identifizieren.

(c) Berechnen Sie außerdem den differenziellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega$ sowie den totalen Wirkungsquerschnitt σ. (Hierbei ist $\mathrm{d}\Omega$ der infinitesimale Raumwinkel.)

Aufgabe 12.2 (6 Punkte):
Berechnen Sie den Stoßparameter $b(\theta)$ als Funktion des Streuwinkels θ für die aus der Vorlesung bekannte Rutherfordstreuung. Berechnen Sie dazu den Lenz'schen Vektor für $t \to \pm\infty$ und verwenden Sie die Konstanz dieses Vektors. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus der Vorlesung.
Hinweise: Vergessen Sie nicht, im Ausdruck für den Lenz'schen Vektor aus Aufgabe 11.2 die Größe α durch $-\alpha$ zu ersetzen, da Sie nun mit dem Potential $V(r) = +\alpha/r$ arbeiten. Weiterhin sind die Relationen $(\tan(\alpha/2))^{\pm 1} = \frac{\sin\alpha}{1 \pm \cos\alpha}$ hilfreich.

Aufgabe 12.3 (6 Punkte):
Zwei identische Massen m streuen elastisch aneinander. Im Laborsystem (LS), in dem eine Masse anfangs ruht, findet man einen Streuwinkel θ', während im Schwerpunktsystem (SPS) ein Streuwinkel θ gemessen wird.

(a) Bestimmen Sie den (in diesem Fall besonders einfachen!) Zusammenhang zwischen θ und θ'. (Vielleicht ist die Relation $\tan(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}$ hilfreich.)

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma'(\theta')/\mathrm{d}\Omega'$ im LS und $\mathrm{d}\sigma(\theta)/\mathrm{d}\Omega$ im SPS? Verwenden Sie $\mathrm{d}\sigma'(\theta') = \mathrm{d}\sigma(\theta)$.

$\frac{2\pi}{86400\,s} = \frac{\pi}{43200\,s} = \frac{3{,}14}{4{,}32 \cdot 10^4\,s} = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^4\,s}$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

BITTE WENDEN

Aufgabe 12.4 (9 Punkte):
Ein Körper der Masse m bewege sich mit der Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega a \sin(\omega t) \\ \omega b \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf einer Ellipse um den Ursprung. Dabei sind a, b und ω positive Konstanten.

(a) Berechnen Sie für diese Bewegung den Drehimpuls bezüglich der Punkte

$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$

$\vec{L}' = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p}$

$m \vec{r}' \times \vec{v}' = \vec{r} \times \vec{a}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$

und untersuchen Sie, wie sich die Resultate mit der Zeit verändern.

(b) Erklären Sie ohne Rechnung, weshalb der Drehimpuls in einem der beiden in (a) betrachteten Fälle zeitlich konstant ist.

Aufgabe 12.5 (Zusatzaufgabe, 8 Punkte):
Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass sich die Erde mit Masse M_1 am Ort $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0.9d)$ und der Mond mit Masse M_2 am Ort $\mathbf{r}_2 = (0, 0, -0.1d)$ befindet (d sei hierbei die momentane Distanz zwischen Erde und Mond). Die von den Massen M_i auf eine Probemasse m am Ort $\mathbf{r}$ wirkenden Gravitationskräfte sind durch $\mathbf{F}_i = -\gamma m M_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass bei einem Verhältnis $M_2 : M_1 = 1 : 81$ das Koordinatensystem gerade so gewählt wurde, dass sein Ursprung im sogenannten abraischen, d.h. schwerelosen, Punkt liegt. Eine Entwicklung des Kraftfelds um den Ursprung in linearer Ordnung in x, y und z ergibt $\mathbf{F} = A(-x, -y, \beta z)$. Bestimmen Sie die Konstanten A und β.

(b) Ist das Kraftfeld $\mathbf{F} = A(-x, -y, \beta z)$ konservativ? Berechnen Sie das zugehörige Potential $V(\mathbf{r})$ und diskutieren Sie die Äquipotentialflächen $V(\mathbf{r}) = \text{const.}$ (Skizze in der (xz)-Ebene). Ist der abraische Punkt stabil?

.012

Theoretische Physik I

12. Übungsblatt

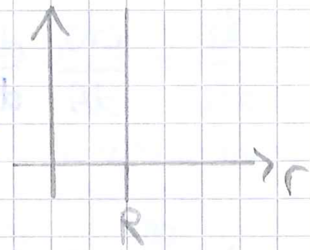
Aufgabe 12.1

(a)

$$\theta(b) = \cancel{2}\pi - 2\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}-\frac{b^2}{r^2}}}$$

$r_{min} = R$ wegen



$\Rightarrow V(r) = 0$ für $R < r$

$$\frac{\frac{b}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}-\frac{b^2}{r^2}}} = 0 \quad \text{für } r = R \quad \left(\text{da } V(r) = +\infty \text{ und } \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0\right)$$

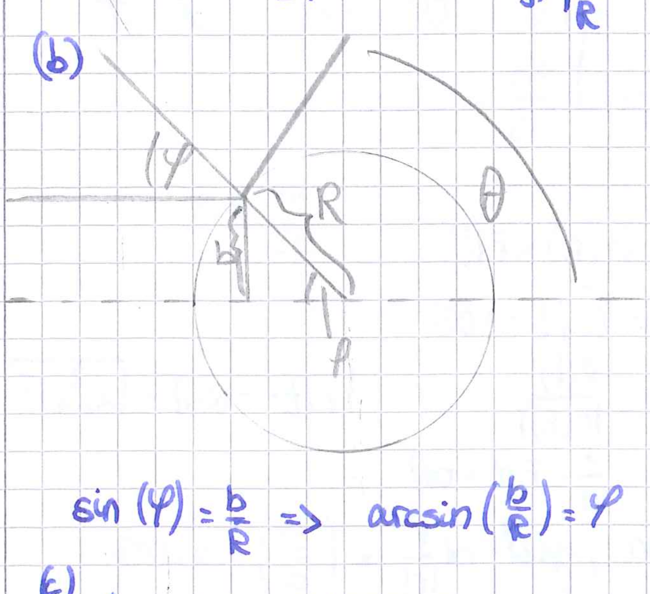
$$\Rightarrow \Delta\varphi = \int_R^{\infty} \frac{b}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}}}\, dr$$

Substituiere $\xi := -\frac{b}{r}$ $\Rightarrow \Delta\varphi = \int_R^{\infty} \frac{\xi^2}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{dr}{d\xi} \cdot d\xi$

$$r = -\frac{b}{\xi} \Rightarrow \frac{dr}{d\xi} = \frac{b}{\xi^2} \Rightarrow \Delta\varphi = \int_R^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \arcsin(\xi)\Big|_R^{\infty}$$

$$\Delta\varphi = \arcsin(\xi)\Big|_R^{\infty} = \arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \underbrace{- \arcsin\left(\frac{b}{\infty}\right)}_{0} = \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)$$

(b)



$\theta = \ldots$ (−1)

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{R} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{b}{R}\right) = \varphi$$

(c)

$$d\sigma = 2\pi b \cdot |db|$$

$$dN = n \cdot d\sigma = n \cdot \left|\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)\right| \cdot d\theta$$

$$= n \cdot 2\pi b \cdot |db| = n \cdot \underbrace{2\pi b \left|\frac{db}{d\theta}\right|}_{\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)} \cdot d\theta$$

wobei: $$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \left|\frac{d\theta}{db}\right|^{-1} = \left|\frac{d}{d\theta}\, \pi - 2\arcsin\left(\frac{b}{R}\right)\right|^{-1} = \left|-\frac{2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}}\right|^{-1}$$

$$= \left| -\frac{R}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) = \left| -\frac{R}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}} \right| 2\pi b$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\Omega} \quad \text{mit } d\Omega = d\theta \cdot 2\pi \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi \sin(\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{b\sqrt{R^2-b^2}}{\sin\theta} = \frac{R^2}{4} \quad -1$$

$$\sigma_{tot} = \int_0^{\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi b \frac{|db|}{|d\theta|} d\theta$$

$$= \int_0^R 2\pi b \, db = \pi R^2 \checkmark$$

$$\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$b = R \sin\varphi = R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$-\frac{1}{2} R \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}R^2 \frac{\cos\frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\sin\theta}$$

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2} R \sin\frac{\theta}{2}$$

$$b = R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin\theta} \cdot R^2 \cdot \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta} = 1$$

Aufgabe 12.2

$$\bar{r}(t=-\infty) = \begin{pmatrix} -x_0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\bar{r}}(t=-\infty) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}(t=+\infty) &= \begin{pmatrix} x_0\cos\theta - b\sin\theta \\ x_0\sin\theta + b\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\bar{r}}(t=+\infty) &= \begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{aus geom. Überlegung}$$

für $x_0 \to \infty$

$$\bar{L}(t) = \bar{r}(t) \times \bar{p}(t) = m \cdot \bar{r}(t) \times \dot{\bar{r}}(t)$$

$$\Rightarrow \bar{L}(t=-\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot b \cdot v_0 \end{pmatrix} = \bar{L}(t=+\infty)$$

$$\bar{A}(t) = \dot{\bar{r}}(t) \times \bar{L}(t) + \alpha \frac{\bar{r}(t)}{|r(t)|} \qquad |r(t=-\infty)| = \sqrt{x_0^2+b^2}$$

$$\bar{A}(-\infty) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mbv_0 \end{pmatrix} + \alpha \frac{1}{|r|} \cdot \bar{r}(t=\infty)$$

Da $|r| \to \infty$ und $x_0 \to \infty$, gilt: $\alpha \frac{\bar{r}}{|r|} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, denn

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_0}{|r|} = -1$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b}{|r|} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{A}(-\infty) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ v_0^2 mb \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}(+\infty) = \begin{pmatrix} v_0\cos\theta \\ v_0\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mbv_0 \end{pmatrix} + \alpha \frac{1}{|r(t=\infty)|} \cdot \begin{pmatrix} x_0\cos\theta - b\sin\theta \\ x_0\sin\theta + b\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2012 Wieder gilt $|r(t=\infty)| = \sqrt{x_0^2+b^2}$

weiter $x_0^2 \to \infty$, $b^2 = \text{const.}$

$\Rightarrow |r(t=\infty)| = x_0$

$\Rightarrow \frac{\vec{r}}{|r|} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \frac{b}{x_0}\sin\theta \\ \sin\theta + \frac{b}{x_0}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ und da $\frac{b}{x_0} \to 0$ ist $\alpha\frac{\vec{r}}{|r|} = \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta \\ \alpha\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A(+\infty) = \left[v_0^2 mb \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta \\ \alpha\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0^2 mb\sin\theta + \alpha\cos\theta \\ v_0^2 mb\cos\theta + \alpha\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A(-\infty) = A(+\infty)$

$\Rightarrow \quad -\alpha = -v_0^2 mb\sin\theta + \alpha\cos\theta$

$v_0^2 mb = +v_0^2 mb\cos\theta + \alpha\sin\theta \qquad E := \frac{1}{2}mv_0^2$

$-\alpha = -2Eb\sin\theta + \alpha\cos\theta$

$\alpha = 2Eb\sin\theta - \alpha\cos\theta$

$2Eb = 2Eb\cos\theta + \alpha\sin\theta$

$b = b\cos\theta + \frac{\alpha}{2E}\sin\theta$

$\frac{\alpha + \alpha\cos\theta}{2E} = b\sin\theta$ ✓

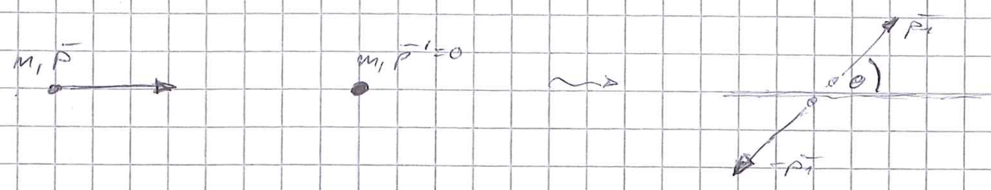
$\frac{\alpha}{2E}\cdot(1+\cos\theta) = b\sin\theta$

$b\cdot(1-\cos\theta) = \frac{\alpha}{2E}\sin\theta$ ✓

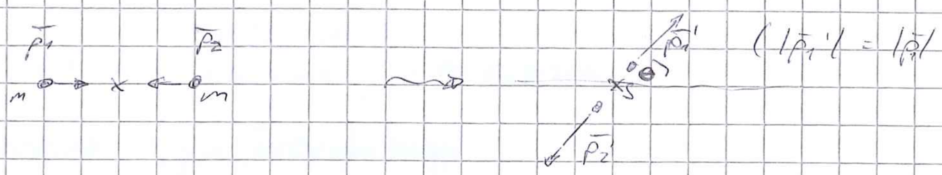
$$\underline{\underline{b = \frac{\alpha}{2E}\cdot\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}$$ ✓

12.3. ~~Aufgabe~~

(a) Im Laborsystem:



Im Schwerpunktsystem:



Im Schwerpunktsystem:

$$|\vec{p}_{1,s}| = \vec{p}_1 - \frac{m}{2m}\vec{p}_1 = \frac{1}{2}\vec{p}_1$$

$$|\vec{p}_{2,s}| = -\frac{1}{2}\vec{p}_1$$

$$|v_L| = \frac{1}{2m}|\vec{p}_1| = |v_{1,s}| = |v_{2,s}|$$

Es gilt: $$\tan\Theta_L = \frac{|v_{1,s}|\sin\Theta_s}{|v_{1,s}|\cos\Theta_s + |v_L|}$$

$$= \frac{|v_L|\sin\Theta_s}{|v_L|\cos\Theta_s + |v_L|} = \frac{\sin\Theta_s}{\cos\Theta_s + 1} = \tan\frac{\Theta_s}{2}$$

$$\Rightarrow \Theta_L = \frac{\Theta_s}{2}$$

$\Theta_L = \Theta'$

$\Theta_s = \Theta$

(b) $$\frac{d\sigma'(\Theta')}{d\Omega'} = \frac{d\sigma(\Theta)}{2\pi\sin(\Theta')d\Theta'}$$

$$\Theta' = \frac{\Theta}{2} \Rightarrow = \frac{d\sigma(\Theta)}{2\pi\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{1}{2}d\Theta}$$

$$= \frac{d\sigma(\Theta)}{\pi\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)d\Theta}$$

$\sin(\Theta) = 2\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{d\sigma(\Theta)}{\pi\sin(\Theta)d\Theta} = 4\pi\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{d\sigma(\Theta)}{2\pi\sin\Theta\,d\Theta}$$

$$= 4\pi\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}$$

2012 Aufgabe 12.4

$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega a \sin(\omega t) \\ \omega b \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $a>0, b>0, \omega>0, m = const.$

(a) Ges.: $\vec{L} = ?$

Geg.: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Formel: $\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \vec{p}_0$

$\vec{r}(t) = \int \dot{r}(t)\,dt = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + $ Konstante

Sei Konstante $= 0$ (zur Vereinfachung)

$\Rightarrow \bar{L}_1 = \bar{r} \times m\dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \bar{p}_1$ — $\bar{r} \times \bar{p}_1$, da $\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega a m \sin(\omega t) \\ \omega b m \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \omega bma\cos^2(\omega t) + \omega amb\sin^2(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega bma \end{pmatrix}$ da $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$

$\downarrow$ von Zeit unabhängig ✓

$\Rightarrow$ konstant für alle Zeit t

$\Rightarrow \bar{L}_2 = \underbrace{\bar{r} \times m\dot{\bar{r}}}_{s.o.} + \bar{r} \times \bar{p}_2$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega bma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega bma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ -ab\,\cancel{\sin}\,\cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab(m\omega - \cancel{\sin}\,\cos(\omega t)) \end{pmatrix}$ -> von Zeit abhängig

(-1)

$g := ab(m\omega - \sin(\omega t))$

t	g
0	$abm\omega$
$\frac{\pi}{2}$	$ab(m\omega - 1)$
π	$abm\omega$
$\frac{3}{2}\pi$	$ab(m\omega + 1)$

g liegt für zunehmendes $t \in [\frac{\pi}{2}; \infty)$ im Intervall $[ab(m\omega - 1); ab(m\omega + 1)]$.

(b) Ohne Einwirkung einer äußeren tangentialen Kraft bleibt der Drehimpuls zeitlich konstant, sowohl in Richtung als auch in Betrag. (Gilt hier für den Drehimpuls um P_1.) Beim Drehimpuls um P_1 handelt es sich um ein Zentralfeld, deshalb $\frac{d}{dt} L = 0$. ✓