Theoretische Physik I: Klassische Mechanik
Prof. Dr. A. Hebecker
S. Kraus

Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Wintersemester 2011/12

Jonathan Friedemann FÖRSTE
Dang Duy Thao LE
Jannis Andrija SCHNITZER

11. Übungsblatt

Tutor: Konrad HEIMPEL
Gruppe 4

1	2	3	Σ
12	12	6	30

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 09.01.2012 in den Tutorien

Aufgabe 11.1 (12 Punkte):
Wie Sie in der Vorlesung gelernt haben, entspricht die Bahn eines Teilchens der Masse m im Potential $V_0(r) = -\frac{\alpha}{r}$ einem Kegelschnitt. D.h. insbesondere, dass die Bahn im Falle eines Kreises bzw. einer Ellipse geschlossen ist. Diese Aussage ist eine Spezialität dieses Potenzials und gilt i.A. nicht mehr wenn das Potenzial modifiziert wird, wie in dieser Aufgabe beispielhaft gezeigt werden soll.
Betrachten Sie das Potenzial

$$V(r) = V_0(r) + \frac{m}{2}\frac{\beta}{r^2}$$

und lösen Sie die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen. Gehen Sie dabei analog zur Vorlesung vor, d.h. finden Sie die Funktion $r(\varphi)$. Um welchen Winkel ist das Perihel der Ellipsenbahn nach einem Umlauf verschoben?
Übrigens: Das Kepler-Potenzial $V_0(r)$ wird z.B. durch allgemein-relativistische Korrekturen modifiziert. Die daraus resultierende Periheldrehung und deren experimenteller Nachweis stellen einen wichtigen Test der Allgemeinen Relativitätstheorie dar.

Aufgabe 11.2 (12 Punkte):
Wie Sie aus der Vorlesung wissen, ist für das Keplerproblem $V(r) = -\alpha/r$ neben Energie und Drehimpuls der Lenz'sche Vektor

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \alpha\frac{\mathbf{r}}{r}$$

eine Erhaltungsgröße ($\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$).

(a) Rechnen Sie dies explizit nach, d.h. zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, dass $\dot{\mathbf{A}} = 0$. Überprüfen Sie dazu zunächst die Relation $\dot{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}/r$. Die Identitäten aus Aufgabe 10.1 (b) könnten hilfreich sein.

(b) In welcher Ebene liegt $\mathbf{A}$?

(c) Bestimmen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$, indem Sie das Skalarprodukt von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{r}$ berechnen. φ sei dabei der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel. Benutzen Sie die Tatsache, dass sowohl $\mathbf{L}$ als auch $\mathbf{A}$ zeitlich konstant sind. Erinnern Sie sich an das, was Sie über die Vertauschbarkeit von Vektoren in einem Ausdruck wie $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ wissen.

(d) Welche Bedeutung haben Betrag und Richtung von $\mathbf{A}$?

Bitte wenden

Aufgabe 11.3 (6 Punkte):
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden in der Vorlesung angegebenen Definitionen einer Ellipse. D.h. zeigen Sie, dass die in Polarkoordinaten durch $r = p/(1 + e\cos\varphi)$ definierte Kurve ($p > 0, 0 < e < 1$) in kartesischen Koordinaten durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben werden kann, wobei das Koordinatensystem hier so gewählt ist, dass der Ursprung mit dem Mittelpunkt der Ellipse zusammenfällt.

Das Team der Theoretischen Physik 1 wünscht Frohe Weihnachten!

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} + r\cdot\cos(\varphi)$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}} + r\cos(\varphi)$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$p = a\cdot(1-e^2)$$

$$a = \frac{p}{(1-e^2)}$$

$$\cancel{b^2 =}\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$y = r\cdot\sin(\varphi)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}} + r\cos(\varphi)\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{r^2\sin^2(\varphi)}{\frac{p^2}{(1-e^2)}} = 1$$

$$\underbrace{\left((1-e^2)\sqrt{\ \dots\ } + (1-e^2)\,r\cos(\varphi)\right)^2}_{p^2} + (1-e^2)\,r^2\sin^2\varphi = p^2$$

$$p^2 = (1-e^2)^2\cdot\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - (1-e^2)^2\cdot\frac{p^2}{(1-e^2)} + 2\cdot\sqrt{\ \dots\ }\cdot(1-e^2)^2\cdot r\cos\varphi + (1-e^2)^2 r^2\cos^2\varphi + (1-e^2)r^2\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow p^2 = p^2 - p^2(1-e^2) + 2\cdot(1-e^2)^2\cdot\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}}\cdot r\cos\varphi + (1-e^2)^2 r^2\cos^2\varphi + (1-e^2)r^2\sin^2\varphi$$

$$p^2\cancel{(1-e^2)} = 2(1-e^2)^{\cancel{2}}\cdot\sqrt{\ \dots\ }\cdot r\cos\varphi + (1-e^2)^{\cancel{2}} r^2\cos^2\varphi + \cancel{(1-e^2)}r^2\sin^2\varphi$$

$$p^2 = 2\cdot\sqrt{p^2 - p^2(1-e^2)}\cdot r\cos\varphi + (1-e^2)^2 r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi$$

Theoretische Physik 1, Blatt 11

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{m}{2}\frac{\beta}{r^2}$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{m}{2}\frac{\beta}{r^2} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} = \frac{L^2 + \beta m}{m} \cdot \frac{1}{r^3} - \alpha \cdot \frac{1}{r^2}$$ ✓

VL: $$m\ddot{r} = m \cdot \frac{L}{mr^2} \cdot \frac{d}{d\varphi} \cdot \left(-\frac{L}{m} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\frac{L^2}{m} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$ ✓

$$\rightarrow -\frac{L^2}{m} \cdot \cancel{\frac{1}{r^2}} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{L^2+\beta m}{m} \cdot \frac{1}{r^{\cancel{3}}} - \alpha \cdot \cancel{\frac{1}{r^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{L^2+\beta m}{L^2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\alpha m}{L^2}$$

Substituiere: $u := \frac{1}{r} \rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -\left(1 + \frac{\beta m}{L^2}\right) \cdot u + \frac{\alpha m}{L^2}$

Setze $b := 1 + \frac{\beta m}{L^2}$

$a := \frac{m\alpha}{L^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + bu = a$$

Genauer: $$\frac{d^2 u(\varphi)}{d\varphi^2} + bu(\varphi) = a$$

Setze $x := \sqrt{b} \cdot \varphi \Rightarrow u(\varphi) = u\left(\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot x\right)$

und betrachte

$$u''\left(\frac{1}{\sqrt{b}}x\right) + bu\left(\frac{1}{\sqrt{b}}x\right) = a$$

Setze $w := b \cdot u\left(\frac{1}{\sqrt{b}}x\right) - a$, dann wird $w'' = u''\left(\frac{1}{\sqrt{b}}x\right)$

$$\Rightarrow w'' + w = 0 \Rightarrow w = A\cos(x - x_0) \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} w = A\cos(x)$$

$$\rightarrow A\cos(x) = b \cdot u\left(\frac{1}{\sqrt{b}}x\right) - a = b \cdot u(\varphi) - a = A\cos(\sqrt{b} \cdot \varphi)$$

$$= b \cdot \frac{1}{r(\varphi)} - a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{A}{b}\cos(\sqrt{b}\varphi) + \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{b}{A\cos(\sqrt{b}\varphi) + a} = \frac{1 + \frac{\beta m}{L^2}}{A\cos\left(\sqrt{1+\frac{\beta m}{L^2}}\varphi\right) + \frac{m\alpha}{L^2}}$$ ✓

Für Perihelverschiebung: betrachte Argument des Kosinus

$\sqrt{1 + \frac{\beta m}{L^2}} \cdot \varphi_x = 2\pi$ ~~wobei~~ für φ_x: der Winkel, unter dem das Perihel das zweite Mal erreicht wird.

$$\Rightarrow \varphi_x = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{\beta m}{L^2}}}$$, Verschiebung ggü. Kepler: $\varphi_V = |2\pi - \varphi_x| = \left|2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{\beta m}{L^2}}}\right|$ ✓

2. Zunächst: $\cancel{\ }\ (|\vec r|)^{\circ} = \frac{d\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dt} = \frac{d\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}}{dt}$

$(u := x^2+y^2+z^2$

$$= \frac{d\sqrt{u(t)}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u(t)}} \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$= \frac{1}{2|\vec r|} \cdot \frac{d}{dt}\left(x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2|\vec r|} \cdot \left(\frac{d}{dt}x(t)^2 + \frac{d}{dt}y(t)^2 + \frac{d}{dt}z(t)^2\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{2|\vec r|} \cdot \left(2x(t)\frac{dx(t)}{dt} + 2y(t)\frac{dy(t)}{dt} + 2z(t)\frac{dz(t)}{dt}\right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{|\vec r|} \cdot \left(\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\right)}$$

$$= \frac{1}{2|\vec r|}\left(2x(t)\frac{dx(t)}{dt} + 2y(t)\frac{dy(t)}{dt} + 2z(t)\frac{dz(t)}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{|\vec r|}\left(x(t)\cdot\frac{dx(t)}{dt} + y(t)\frac{dy(t)}{dt} + z(t)\cdot\frac{dz(t)}{dt}\right)$$

$$= \frac{x}{|\vec r|}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{y}{|\vec r|}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{z}{|\vec r|}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{1}{|\vec r|}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot x\\\dot y\\\dot z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\vec r}{|\vec r|}\cdot\dot{\vec r} \quad \square$$

Allerdings habe ich keinen blassen Schimmer, warum das zu zeigen war, beim Zeigen von $\dot A = 0$ hat es mir jedenfalls nicht geholfen. Vielmehr:

$$\dot A = \frac{d\dot{\vec r}}{dt} \times \underbrace{\vec L}_{\text{aus } E_x} + \underbrace{\dot{\vec r} \times \frac{d\vec L}{dt}}_{0} - \underbrace{\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec r}{|\vec r|}\right)}$$

da Einheitsvektor, ~~gekürzt~~ ist nur Winkelgeschw. relevant.

$$= \ddot{\vec r} \times (m|\vec r|^2\vec\omega) - \alpha\vec\omega\times\left(\frac{\vec r}{|\vec r|}\right)$$

$$= m\ddot{\vec r} \times |\vec r|^2\vec\omega - \alpha\vec\omega\times\frac{\vec r}{|\vec r|}$$

$\ddot{\vec r} = \frac{\vec F}{m}$

$$= \vec F \times |\vec r|^2\vec\omega - \alpha\vec\omega\times\frac{\vec r}{|\vec r|}$$

$$\vec F = -\vec\nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha}{|\vec r|}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{\alpha}{|\vec r|}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\alpha}{|\vec r|}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha}{|\vec r|} = \alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -x\cdot\frac{1}{|\vec r|^3}\cdot\alpha \quad \text{(analog für y und z)}$$

$$\Rightarrow \vec F = -\frac{\vec r}{|\vec r|}\cdot\frac{\alpha}{|\vec r|^2} = -\frac{\alpha}{|\vec r|}\cdot\frac{\vec r}{|\vec r|^2} \Rightarrow \dot A = -\frac{\alpha}{|\vec r|^3}\cdot|\vec r|^2\cdot(\vec r\times\vec\omega) - \frac{\alpha}{|\vec r|}(\vec\omega\times\vec r)$$

$$= +\frac{\alpha}{|\vec r|}\cdot(\vec\omega\times\vec r) - \frac{\alpha}{|\vec r|}(\vec\omega\times\vec r) = 0 \quad \square$$

(b) ~~Bahn~~ $\dot{\vec{r}}$ liegt in der Ebene der Ellipse, $\vec{L}$ steht senkrecht darauf. $\vec{r}$ liegt in der Ebene der Ellipse.

Das Kreuzprodukt $\dot{\vec{r}} \times \vec{L}$ muss auch in der Ellipsenebene liegen, da es senkrecht zu $\dot{\vec{r}}$ und zu $\vec{L}$ sein muss und $\dot{\vec{r}}$ und $\vec{L}$ schon einen rechten Winkel bilden. Somit liegt $\vec{A}$ auch in der Ebene der Ellipse.

(c) $\vec{A} \cdot \vec{r} = |A||r| \cdot \cos(\varphi) = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) - \alpha \cdot \frac{r^2}{|r|}$

Zyklizität von $a(b \times c) = c(a \times b) = b(c \times a)$

$= \vec{L}\,(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \alpha |r|$

$|A||r| \cos\varphi = m\,(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 - \alpha |r|$

$|A||r| \cos\varphi + \alpha |r| = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2$

$|r| = \frac{m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2}{A\cos\varphi + \alpha}$ (✓) $m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = \frac{L^2}{m}$

d) Aus der ~~Ellipsengleichung, die sich später~~ Gleichung, die in allgemeiner Form die Bahnellipse beschreibt

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

wird deutlich, dass der Lenz'sche Vektor ein viel- (genauer: ein α-faches) der Exzentrizität e ist (betragsmässig, versteht sich). ✓

Er zeigt stets vom Potentialzentrum zum Perihel der Bahn. ✓

3. $x = \sqrt{a^2 - b^2} + r\cos\varphi$; $p = \frac{b^2}{a}$; $b^2 = a^2(1-e^2)$

$y = r\sin\varphi$ $\Rightarrow p = a\,(1-e^2) \Rightarrow a = \frac{p}{(1-e^2)}$

$b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}} + r\cos\varphi$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}} + r\cos\varphi\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\frac{r^2\sin^2(\varphi)}{p^2}}{(1-e^2)} = 1$

$\Leftrightarrow \left((1-e^2)\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}} + (1-e^2)\,r\cos\varphi\right)^2 + r^2(1-e^2)\sin^2(\varphi) = p^2$

$\Leftrightarrow (1-e^2)^2\left(\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}\right) + 2\,(1-e^2)^2\sqrt{\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2}{(1-e^2)}}\; r\cos\varphi + r^2\,(1-e^2)^2\cos^2\varphi + r^2(1-e^2)\sin^2(\varphi) = p^2$

$\Leftrightarrow \cancel{p^2} - p^2(1-e^2) + 2\cdot(1-e^2)\cdot\sqrt{p^2 - p^2(1-e^2)} \cdot r\cos\varphi + r^2\,(1-e^2)^2\cos^2\varphi + r^2\,(1-e^2)\sin^2(\varphi) = \cancel{p^2}$

$\Leftrightarrow p^2\,\cancel{(1-e^2)} = 2\,\cancel{(1-e^2)}\sqrt{p^2 - p^2 + p^2e^2}\; r\cos\varphi + r^2\,(1-e^2)^{\cancel{2}}\cos^2\varphi + r^2\,\cancel{(1-e^2)}\sin^2(\varphi)$

$\Leftrightarrow p^2 = 2per\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - e^2r^2\cos^2\varphi = 2per\cos\varphi + r^2 - e^2r^2\cos^2\varphi$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 = 2per\cos\varphi + r^2\left(1 - e^2\cos^2\varphi\right) = 2per\cos\varphi + r^2\left(1+e\cos\varphi\right)\left(1-e\cos\varphi\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\left(1+e\cos\varphi\right)\left(1-e\cos\varphi\right) = p^2 - 2per\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 - er^2\cos\varphi = \frac{p^2 - 2per\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{p^2 - 2per\cos\varphi}{1+e\cos\varphi} + er^2\cos\varphi = \frac{p^2 - 2per\cos\varphi + er^2\cos\varphi + e^2r^2\cos^2\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{(p - er\cos\varphi)^2 + er^2\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{(p-er\cos\varphi)^2}{1+e\cos\varphi} + \frac{er^2\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r^2 + er^2\cos\varphi}{1+e\cos\varphi} - \frac{er^2\cos\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{(p-er\cos\varphi)^2}{1+e\cos\varphi}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = (p - er\cos\varphi)^2 \Leftrightarrow \pm r = p - er\cos\varphi \quad (\text{betrachte nur } +)$$

$$\Rightarrow \quad r + er\cos\varphi = p$$

$$\Leftrightarrow \quad r(1+e\cos\varphi) = p \Leftrightarrow r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \quad \square$$