Theoretische Physik 1 19.12.2011

Aufgabenblatt 10

	1	2	3	4	Σ	%
Jannis Andrija Schnitzer Dang Duy Thao Le Jonathan Förste	8	6	4	10	28	93

Dozent: Prof. Dr. A. Hebecker

Gruppenleiter: Konrad Heimpel

Sehr schön, danke!

Merry $X_p - m$!

Brought to you by:
Club Mate™

Theoretische Physik 1
Blatt 10

1 a) (i) $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk} =$

$$= \begin{cases} \operatorname{sgn}((i,j,k)) & \text{für } (i,j,k) \in \mathfrak{S}_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Perm.} \\ -1 & \text{für ungerade Perm.} \end{cases}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} 1 = \# \mathfrak{S}_3 = 3! = \underline{\underline{6}} \quad \square$$

(ii) $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk} = \alpha \delta^{il}$

Für festes j,k muss $i=l$ sein, damit ε^{ijk} und ε^{ljk} beide $\neq 0$

$$\Leftrightarrow \delta^{il}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ljk} = \alpha\, \delta^{il}\delta^{il}$$

$\delta^{il}\delta^{il} = \delta^{ii} = 3$

da $i \in \{1,2,3\}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ijk} = 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{3} = 2 \quad \square$$

(iii)

$$\underbrace{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk}} = \alpha \underbrace{\delta^{ij}\delta^{lm}} + \beta \underbrace{\delta^{il}\delta^{jm}} + \gamma \underbrace{\delta^{im}\delta^{jl}}$$

0 wenn $i=j$ od. $l=m$ → α wenn $i=j$ und $l=m$ | β wenn $i=l$ und $j=m$ | γ wenn $i=m$ und $j=l$

1 wenn $i=l$ und $j=m$

-1 wenn $i=m$ und $j=l$

Was für ein Wort ist das? :)

~~$+\gamma$~~

Es sind nur diese Kombinationen möglich, da alle Indizes nur von 1 bis 3 gehen und $i, j, l, m \neq k$ ohnehin gelten muss.

$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = -1$, um Bedingungen von ε-Tensor zu erfüllen ✓

$$\Rightarrow \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}$$

$\boxtimes$

b) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \times (\hat{e}^k \varepsilon^{klm} b^l c^m)$

$= \hat{e}^i \varepsilon^{ijk} a^j \varepsilon^{klm} b^l c^m$ (da $(\hat{e}^k)^k = 1$)

$= \hat{e}^i (\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} a^j b^l c^m)$ (da $\varepsilon^{klm} = \varepsilon^{lmk}$ positive Permutation)

$= \hat{e}^i ((\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}) a^j b^l c^m)$ ✓

$= \hat{e}^i (\delta^{il}\delta^{jm} a^j b^l c^m - \delta^{im}\delta^{jl} a^j b^l c^m)$

$= \hat{e}^i (a^j b^i c^j - a^j b^j c^i)$ (Kommentar $a^j b^j = \bar{a}\cdot\bar{b}$; $a^i b^i = \bar{a}\cdot\bar{b}$) ✓

$= \hat{e}^i\left((a^i c^i)\cdot b^i - (a^i b^i)\, c^i\right)$ ← bitte deutlicher i & j unterscheiden!

$= (\bar{a}\cdot\bar{c})\cdot b^i\hat{e}^i - (\bar{a}\cdot\bar{b})\, c^i\hat{e}^i \quad (x^i\hat{e}^i = \bar{x})$

$= (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c} \quad \square$ ✓

$(\bar{a}\times\bar{b})^2 = (\bar{a}\times b)\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$

$= (\hat{e}^i \varepsilon^{ijk} a^j b^k)\cdot(\hat{e}^i \varepsilon^{ilm} a^l b^m) \quad (\hat{e}^i\cdot\hat{e}^i = 1)$

$= \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{ilm} a^j b^k a^l b^m$

$= \varepsilon^{jki}\varepsilon^{lmi} a^j b^k a^l b^m$

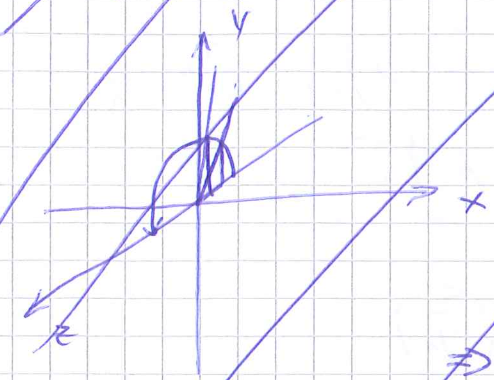
$= (\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}) a^j b^k a^l b^m$

$= a^j a^j b^k b^k - a^j b^j a^k b^k \quad (x^i x^i = \bar{x}^2 = |x|^2)$

$= a^2\cdot b^2 - (\bar{a}\bar{b})(\bar{a}\bar{b}) = a^2\cdot b^2 - (\bar{a}\bar{b})^2$

✓ $\square$

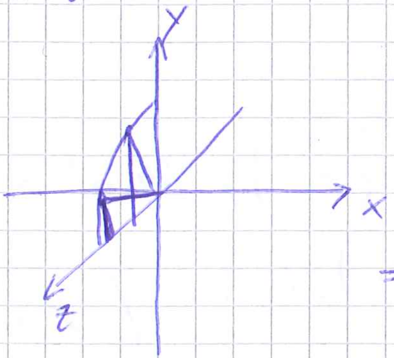
~~Aufgabe 2~~



$$\cancel{R_x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \cos\varphi - \sin c \\ \sin b + \cos b \end{pmatrix}}$$

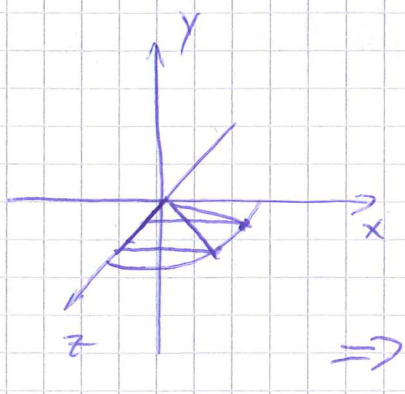
$$\cancel{\Rightarrow R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\sin c \\ 0 & & \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2



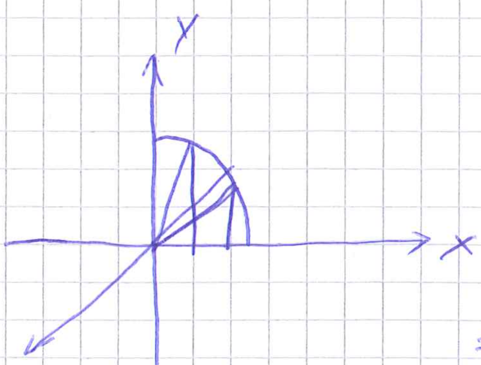
$$R_x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\varphi - z\sin\varphi \\ y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & +\cos\varphi \end{pmatrix}$$ ✓



$$R_y \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y \\ -x\sin\varphi + z\cos\varphi \end{pmatrix}$$

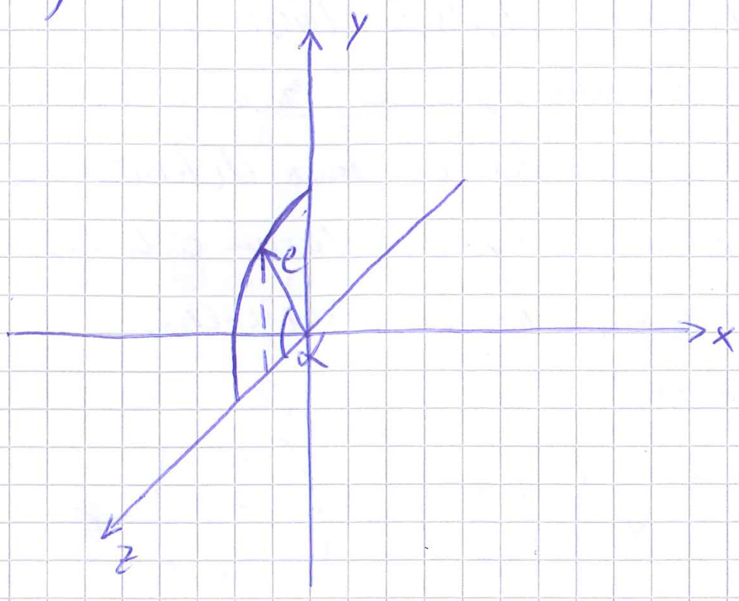
$$\Rightarrow R_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ ✓



$$R_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

b)



Ihr beschreibt den Lösungsweg richtig, dreht aber einmal zu wenig.

−2

Schritt 1: Anwendung von R_x
(Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel α)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Da e auf z-Achse liegt kann jetzt die Drehmatrix R_z angewandt werden.

Schritt 3: Um nun die Rotation auf den ursprünglichen Vektor e anzuwenden muss also die Matrix R_z mit der transformierten R_x-Matrix zurückgedreht werden

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_x^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_x^T \cdot R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi \\ -\sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R_e \in SO(3)$$

angewandt auf R_x → volle Drehmatrix

3. Statt den Vektor zur Vereinfachung auf die z-Achse zu drehen lässt sich auch das Koordinatensystem zum Vektor e drehen. Die Koordinaten eines Vektors im neuen Koordinatensystem lassen sich mit den neuen Basisvektoren darstellen.

~~Die Drehmatrix~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = e$$

Da das Ergebnis e ergibt muss die mit dem Winkel α versehene R_x^T-Drehmatrix mit der Ursprünglichen R_z-Matrix multipliziert die Drehmatrix mit den neuen Basisvektor ergeben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi \\ -\sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem überein welches in b) gemacht wurde. Daraus folgt, dass durch die Prozedur des Koordinatendrehens die Aussage gezeigt ist $\square$ (✓)

$\ddot{\vec r}_0$ hängt von ω ab $\Rightarrow \ddot{\vec r}_0 = 0$

$$\Rightarrow m\,\ddot{\vec r} = \vec F_g - m\cdot\left(2\vec\omega\times\dot{\vec r}\right) \qquad \Big\}\ F_g = -mg$$

Für $\omega = 0$:

$$m\cdot\ddot{\vec r}_0 = -m\cdot\vec g - m\cdot 2\left(0\times\dot{\vec r}\right)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{\vec r}_0 = -m\vec g \Rightarrow \ddot{\vec r} = -\vec g \longrightarrow$$

$$\vec r_0(t) = \vec v_0 t - \frac{1}{2}\vec g t^2 \checkmark$$

$$\vec r(t) = \vec r_0(t) + \omega\,\vec u(t)$$

$$m\ddot{\vec r} = -m\vec g - 2m\,\vec\omega\times\dot{\vec r} \qquad \ddot{\vec r} = -\vec g - 2\vec\omega\times\dot{\vec r}$$

$$\dot{\vec r} = \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix}$$

$$\vec\omega\times\dot{\vec r} = |\omega|\cdot\begin{pmatrix}\dot z\cos\varphi - \dot y\sin\varphi\\ \dot x\sin\varphi\\ -\dot x\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec r}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\-gt\end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec r} = -2|\omega|\begin{pmatrix}\dot z\cos\varphi - \dot y\sin\varphi\\ \dot x\sin\varphi\\ -\dot x\cos\varphi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -2|\omega| \begin{pmatrix} \dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi \\ \dot{x}\sin\varphi \\ -\dot{x}\cos\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} = -2|\omega|\left(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi\right)$$
$$\ddot{y} = -2|\omega|\,\dot{x}\sin\varphi$$
$$\ddot{z} = 2|\omega|\,\dot{x}\cos\varphi - g$$

$\dot{x} \sim |\omega|$, somit $|\omega|\dot{x} \sim |\omega|^2$

$$\ddot{x} = -2|\omega|\left(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi\right)$$
$$\ddot{y} = O(\omega^2)$$
$$\ddot{z} = -g + O(\omega^2)$$

Vernachlässigung von $O(\omega^2)$ $\longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y} \simeq 0 \\ \dot{z} \simeq -gt \end{array}\right\} \ddot{x} \simeq -2|\omega| \cdot \left((-gt)\cos\varphi\right) = 2|\omega|\cos\varphi \cdot g\,t$$

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = 2|\omega|\cos\varphi \cdot gt$$
$$\dot{x} = \int 2|\omega|\cos\varphi\, gt\, dt = |\omega|\cos\varphi\, g t^2$$
$$x = \frac{1}{3}|\omega|\cos\varphi\, g t^3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos\varphi \, g t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_S - \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \omega \vec{u}(t)$$

Hier:

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100\,m \end{pmatrix}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\omega\cos\varphi \, g t^3 \\ 0 \\ 100\,m - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

zunächst t_A (Aufprall):

$$z(t_A) = 0 = 100\,m - \frac{1}{2} g t_A^2$$

$$t_A = \sqrt{\frac{2}{g}\cdot 100\,m} \approx 4{,}52\,s$$

$$\omega_{Erde} = \frac{2\pi}{d} \quad (d \mathrel{\hat=} \text{Tag})$$

$$\approx \frac{2\pi}{86400\,s}$$

$$\rightarrow x(t_A) = \frac{1}{3}\cdot\omega_{Erde}\cdot\cos\varphi \, g t_A^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi}{86400\,\cancel{s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 9{,}81\frac{m}{\cancel{s^2}}$$

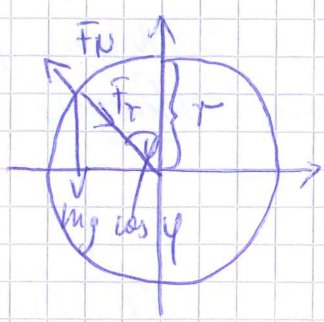
$$\cdot (4{,}52)^3\,\cancel{s^3}$$

$\approx 0{,}01553\ m$

$\approx \underline{\underline{1{,}55\ cm}}$

Aufgabe 3

Skizze



$$x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$E_{pot\,0} = mgr$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{kin} = \Delta E_{pot} = mgr - mg\,x(\varphi)$$
$$= mgr - mgr \cdot \cos(\varphi)$$
$$= mgr(1 - \cos\varphi)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgr(1 - \cos\varphi) \quad | \cdot \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow v^2 = 2gr(1 - \cos\varphi) \quad \underline{(i)}$$

$$F_Z = F_N$$

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\varphi \quad | : (m \cdot g)$$

$$\frac{v^2}{g \cdot r} = \cos\varphi \quad \underline{(ii)}$$

(i) einsetzen in (ii)

$$\frac{2gr}{gr}(1 - \cos\varphi) = \cos\varphi$$

$$2(1 - \cos\varphi) = \cos\varphi$$

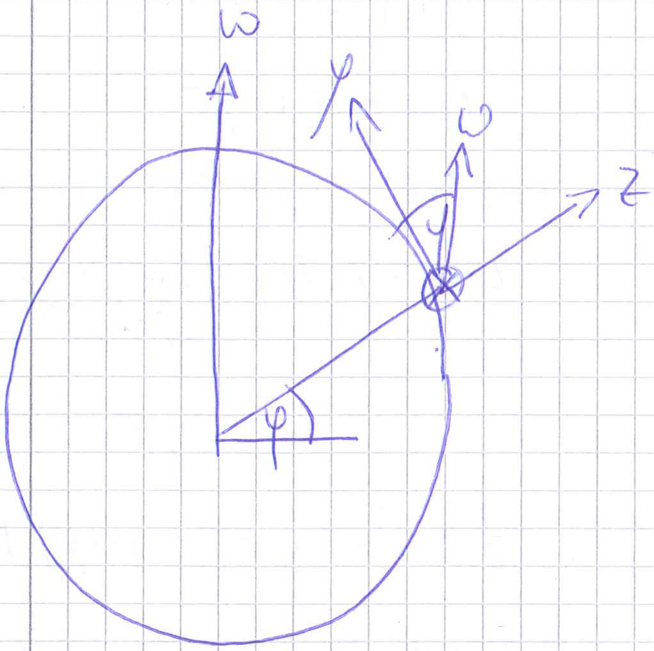
$$2 - 2\cos\varphi = \cos\varphi \quad | + 2\cos\varphi$$

$$2 = 3\cos\varphi \quad | : 3$$

$$\frac{2}{3} = \cos\varphi \quad | \arccos$$

$$\underline{\underline{\arccos\left(\frac{2}{3}\right) = \varphi}}$$ ✓ schön!

Aufgabe 6 $\quad m\ddot{r} = F_a - m\Big(\underbrace{R^{-1}\ddot{r}_0}_{\text{Beschleunigung des Ursprungs}} + \underbrace{\omega\times(\omega\times r)}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2\omega\times\dot{r}}_{\text{Corioliskraft}} + \underbrace{\dot{\omega}\times r}_{\text{tangentiale Beschleunigung}}\Big)$



ω im gew. Koord.syst: $\quad \bar{\omega} = |\omega| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

NR: $\omega\times(\omega\times r) = \bar{\omega}(\bar{\omega}\,\bar{r}) - (\bar{\omega}^2)\cdot r$

$= \bar{\omega}\cdot\big(|\omega|\cdot(r^2\cos\varphi + r^3\sin\varphi)\big)$

$\quad - (\bar{\omega}^2)\cdot r$

$= |\omega|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot (r^2\cos\varphi + r^3\sin\varphi) - |\omega|^2\cdot r$

$= |\omega|^2\cdot(\ldots)$ $\Rightarrow$ Zentrifugalkraft kann vernachlässigt werden

$= O(\omega^2)$