1	2	3	4	Σ
6	6	4	6	22/24

Saskia KLAUS, Thomas RUDZKI, Jannis A. SCHNITZER

MOOG, Tutor: Nikolas David SCHWELLBÄRNER

Übungen zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2012

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 9
Abgabetermin: Donnerstag, 21.06.2012, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Elementarteiler einer Matrix)*
Bestimmen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} X+2 & -X-1 & X+2 \\ -1 & X+1 & -X-2 \\ X+2 & 0 & X+2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q}[X]).$$

Aufgabe 2. *(Ähnlichkeit von Matrizen)*
Sind die beiden folgenden Matrizen ähnlich zueinander?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -4 & 4 & 12 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}), \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 3. *(Primärzerlegung)*
Gegeben sei der $\mathbb{R}[T]$-Torsionsmodul

$$M = \mathbb{R}[T]/(T^4-1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T^4+2T^2+1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T^3-T^2-T+1).$$

(a) Bestimmen Sie gemäß Satz 3.43 die Zerlegung von M in p-primäre Untermoduln.

(b) Bestimmen Sie die Elementarteiler von M.

Aufgabe 4. *(Endliche Gruppen als Kokern ganzzahliger Matrizen)*
Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie: $\operatorname{coker}(A)$ ist genau dann eine endliche abelsche Gruppe, wenn $\det(A)$ von Null verschieden ist. In diesem Fall gilt

$$\#\operatorname{coker}(A) = |\det(A)|.$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & -x-1 & x+2 \\ -1 & x+1 & -x-2 \\ x+2 & 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

Wende Algorithmus aus 3.40 an:

Umsortieren $\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x+1 & -x-2 \\ x+2 & -x-1 & x+2 \\ x+2 & 0 & x+2 \end{pmatrix} -1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x+1 & -x-2 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ x+2 & 0 & x+2 \end{pmatrix} +1\cdot$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -x-2 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ x+2 & 0 & x+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -x-1 & 0 \\ x+2 & 0 & (x+2)\cdot(1-(x+2)) \end{pmatrix}$

$+(-x-2)\cdot$ $\qquad +(x+2)\cdot$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)(x+1) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)(x+2)(x+1) \end{pmatrix} \Rightarrow$ Elementarteiler sind

$1,\ x+1,\ (x+2)\cdot(x+1)$ ✓

6/6

2. Bestimme Elementarteiler beider Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -4 & 4 & 12 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Umsort.}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -4 & 4 & 12 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 \\ -4 & 12 & 12 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -12 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & 24 \\ 6 & -6 & -12 \\ 6 & -12 & -24 \end{pmatrix} +1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 6 & -6 & -12 \\ 6 & -12 & -24 \end{pmatrix} +1\cdot$

$-2\cdot \qquad -3\cdot$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 6 & -6 & -12 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 \\ 0 & -6 & -12 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} +2\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1\cdot$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Vertausch}} -2\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ELT 2, 6, 0 ✓

$+2\cdot$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Umsort.}} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 8 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1\cdot} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 18 \\ 4 & 0 & 12 \\ 8 & 12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3\cdot} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -18 & +18 \\ 4 & -12 & 12 \\ 8 & -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3, \\ -2, \\ -4\cdot \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 18 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} -1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 18 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -1\cdot \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ElT sind } 2, 6, 0 \Rightarrow A \sim B. \quad \square$$

✓ 6/6

3. Da $\mathbb{R}[T]$ als $\mathbb{R}[T]$-Modul ~~von~~ z.B. von der $1_{\mathbb{R}[T]}$, also insbes. endlich, erzeugt ist, gilt dies auch für M.

Zerlegung: Zunächst zerlege $\mathbb{R}[T]/(T^4-1)$, $\mathbb{R}[T]/(T^4+2T^2+1)$

und $\mathbb{R}[T]/(T^3-T^2-T+1)$.

Nach 1.15: Finde ich für die Polynome, deren Hauptideale ausgeteilt werden, eine Primfaktorzerl., so kann ich die Moduln dementsprechend zerlegen.

$$T^4-1 = (T^2-1)\cdot(T^2+1) = (T-1)(T+1)(T^2+1).$$

Diese ~~drei~~ drei Faktoren sind in $\mathbb{R}[T]$ irreduzibel (Linearfaktoren sowieso, T^2+1 da keine Nullstelle), also prim. ✓

$$\Rightarrow \mathbb{R}[T]/(T^4-1) \cong \mathbb{R}[T]/(T-1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T^2+1)$$ ✓ gut

$$T^4+2T^2+1 = \underbrace{(T^2+1)}_{\substack{\text{irred} \\ \Rightarrow \text{prim}}}{}^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}/(T^4+2T^2+1) \cong \mathbb{R}/((T^2+1)^2) \checkmark$$

(eigentlich sogar =)

$$T^3-T^2-T+1 \underset{\substack{\text{Rate Nullstelle} \\ T=+1,\text{ dann} \\ \text{Polynomdiv.}}}{=} (T^2-1)(T-1) = (T-1)^2(T+1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}[T]/(T^3-T^2-T+1) \cong \mathbb{R}[T]/((T-1)^2) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1).$$

$$\Rightarrow M \cong \mathbb{R}[T]/(T-1) \oplus \mathbb{R}[T]/((T-1)^2) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1)$$

$$\oplus \mathbb{R}[T]/(T^2+1) \oplus \mathbb{R}[T]/((T^2+1)^2). \checkmark$$

exakt

Ausserdem gilt mit dieser Zerlegung nach 3.42:

$$M(T-1) \cong \mathbb{R}[T]/(T-1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T-1)^2 \checkmark$$

$$M(T+1) \cong \mathbb{R}[T]/(T+1) \oplus \mathbb{R}[T]/(T+1) \checkmark$$

$$M(T^2+1) \cong \mathbb{R}[T]/(T^2+1) \oplus \mathbb{R}[T]/((T^2+1)^2) \checkmark$$

$M(p) = 0$ für alle übrigen Primelem. p. ✓

$$\Rightarrow M \cong M(T-1) \oplus M(T+1) \oplus M(T^2+1) \qquad \square \checkmark$$

Und wie lauten die Elementarteiler?

4/6

4. $A \sim \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$; $a_1, \dots, a_n$ sind El.-Teiler von A. ✓

$$\operatorname{coker}(A) \cong \operatorname{coker}(\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \mathbb{Z}^n / \operatorname{im}(\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n))$$

$$\underset{3.29 \,\&\, 3.38}{\cong} \mathbb{Z}/(a_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(a_n)$$ ✓

(Siehe auch 4.12)

$\mathbb{Z}/(a_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(a_n)$ ist genau dann endlich, wenn $a_i \neq 0 \ \forall i$. ✓

(denn $\mathbb{Z}/(0) \cong \mathbb{Z}$ und $\#\mathbb{Z}$ ist unendl.; aber $\mathbb{Z}/(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ $\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$) ✓ ganz genau

bis auf Assoziiertheit

$\det(A) \cong a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ (3.39)

$a_1 \cdot \dots \cdot a_n \neq 0 \iff a_i \neq 0 \ \forall i$ ($\mathbb{Z}$ nullteilerfrei) ✓

$\square$

$$\# \operatorname{coker}(A) = \#\left(\mathbb{Z}/(a_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(a_n)\right)$$

$$= \#\left(\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}\right)$$

$$= |a_1| \cdot \dots \cdot |a_n| = |\det(A)|.$$

Betragsstriche, weil a_i bis auf Associiertheit bestimmt, und $(a_i) = (-a_i)$. (u. weil $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$)

6/6