$3 + 16 - 36 = -17$

Saskia KLAUS
Thomas RUDZIKI
Jannis A. SCHNITZER

1	2	3	4	Σ
5	1	6	6	18/24

Übungen zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2012 Tutor: N. D. SCHNELLBÄCHER MOOS

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach

Blatt 7

ACHTUNG! Abgabetermin: **Mittwoch, 06.06.2012, 18.00 Uhr**

Aufgabe 1. *(Endomorphismen freier Moduln)*
Für $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sei

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 3 & 2 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für welche a ist der Modulhomomorphismus $M_a : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv)? Bestimmen Sie, falls existent, ein nichttriviales Element im Kern von M_a.

Aufgabe 2. *(Torsion und Rang)*
Sei $M = \mathbb{Z}[X]/(2X^3)$. Betrachten Sie M als $\mathbb{Z}$-Modul und bestimmen Sie den Torsionsuntermodul $T(M)$ und den Rang von M.

Aufgabe 3. *(Exakte Folgen und endliche Erzeugtheit)*
Sei R ein Ring. Für einen endlich erzeugten R-Modul M bezeichne $e(M)$ die minimale Kardinalität eines Erzeugendensystems von M. Zeigen Sie, dass für eine kurze exakte Folge von R-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

gilt: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M, und

$$e(M) \leq e(M') + e(M'').$$

Geben Sie ein Beispiel, in dem $e(M)$ echt kleiner als $e(M') + e(M'')$ ist.

Aufgabe 4. *(Exakte Folgen und äußere Potenzen)*
Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $v \neq 0$ ein Vektor in V. Die Abbildung $\alpha_0 : K \to V$ sei durch $\lambda \mapsto \lambda v$ gegeben. Zeigen Sie, dass es für $i = 1, \dots, n$ wohldefinierte lineare Abbildungen

$$\alpha_i : \bigwedge^i V \longrightarrow \bigwedge^{i+1} V, \qquad w_1 \wedge \ldots \wedge w_i \longmapsto v \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_i$$

gibt. Zeigen Sie weiter, dass die Folge

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha_0} V \xrightarrow{\alpha_1} \bigwedge^2 V \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bigwedge^n V \longrightarrow 0$$

exakt ist.
Tipp: Ergänzen Sie v zu einer Basis $(v_1 = v, v_2, \dots, v_n)$ von V, und betrachten Sie die zugehörigen Basen der äußeren Potenzen.

$\Lambda^i V$ wird erz. von allen $\underline{w_1 \wedge \dots \wedge w_i}$

$w_i = \sum_i \kappa_i v_i$

① Für $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sei

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 3 & 2 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

2.2 Für welche a ist der Modulhomomorphismus $M_a : (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ injektiv / surjektiv / bijektiv

Dazu nach Satz 2.13 $\det(M_a)$ bilden

$\Rightarrow$ ~~$a = \bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$~~

$$\det(M_a) = \overline{3 + 16 + \underbrace{12a^2}_{=\bar{0}\text{, da Vielfaches von } 6} - 36 - 4a - 4a}$$

$$= \overline{-17 - 8a} = \overline{4a+1}$$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung:

$a = \bar{0} \Rightarrow \det(M_a) = \bar{1}$
$= \bar{1}$ " " $= \bar{5}$
$= \bar{2}$ " " $= \bar{3}$
$= \bar{3}$ $= \bar{1}$
$= \bar{4}$ $= \bar{5}$
$= \bar{5}$ $= \bar{3}$

Für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ sind $x_1 = \bar{2}$ und $x_2 = \bar{3}$ Nullteiler $(\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0})$

*

~~$\bar{3} \notin R^\times$~~ ~~aber~~ $\overset{\text{Satz 2.13}}{\Rightarrow}$ Für $a = \bar{1}, \bar{4}$ ist M_a nicht injektiv f

Für $a = \bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$ ist M_a injektiv f

det = 3! $\bar{2}$ nein

Für Bijektivität / Surjektivität (Satz 2.13) muß gelten $\det(M_a) \in R^\times$

Für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ sind $y_1 = \bar{1}$ und $y_2 = \bar{5}$ Einheiten, da $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ und $\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\Rightarrow$ Für $a = \bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}$ ist M_a injektiv, wie auch bijektiv / surjektiv

Für nicht triviales Element, keine bijektive Abbildung:

Dafür $a = \bar{2}$ und Gauß-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \bar{0} \\ 4 & 3 & 2 & \bar{0} \\ 4 & 4 & 1 & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot 4$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ & 5 & 4 & 0 \\ & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ & 5 & 4 & 0 \\ & & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot 4$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 4 & 0 \\ & & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 4x + 2z = \bar{0}$

$2y + z = \bar{0}$

$3z = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad z = \bar{2} \text{ oder } z = \bar{0}$

Sei $z = \bar{2}$

$\Rightarrow 2y + \bar{2} = \bar{0}$

$2y = \bar{4} \quad \Rightarrow \quad y = \bar{2}$

$\Rightarrow 4x + \bar{4} = \bar{0}$

$4x = \bar{2} \quad \Rightarrow \quad x = \bar{2}$

$\Rightarrow (\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}) \in \ker(M_a)$ ✓

und damit nicht-triviales Element im Kern ✓

eigentlich habt ihr ja alles richtig gemacht, bis auf das bei (*) das widerspricht doch dem was ihr danach sagt

5/6

2. $M = \mathbb{Z}[x]/(2X^3)$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

Jedes $f \in \mathbb{Z}[x]$ ist darstellbar als

$$f = \underbrace{2X^3 \cdot g(x)}_{\in (2x^3).} + r(x) \quad \text{(Division durch } 2x^3 \text{ m. Rest)}$$

$\mathbb{Z}[X]$ ist kein euklid. Ring!

$\Rightarrow \mathbb{Z}[x]/(2x^3)$ ~~ist die~~ enthält alle Polynome, die Rest der Div. durch $2X^3$ sind.

gibt es i. A. nicht

Betrachte das allgem. $f \in \mathbb{Z}[x]$:

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \quad \text{(wobei fast alle } a_k = 0)$$

Polynome keine Potenzreihen!

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k X^k$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (\overline{a_k} \cdot 2 + u_k) x^k$$

Wobei $a_k = 2\overline{a_k} + u_k$ und $u_k \in \{0,1\}$.

$(u_k = 1 \Leftrightarrow 2 \nmid a_k \,;\ \overline{a_k} = \frac{a_k - u_k}{2}.)$

$$\Rightarrow f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \sum_{k=3}^{\infty} u_k X^k + \underbrace{2X^3 \sum_{k=3}^{\infty} \overline{a_k} X^{k-3}}_{\in (2x^3)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}[x]/(2x^3) = \{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \sum_{k=3}^{\infty} u_k X^k \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, u_k \in \{0,1\}; u_k = 0 \text{ f.f.a. } k \}$$

Suche nun $T(\mathbb{Z}[x]/(2x^3))$.

$$T(M) = \{ f + (2x^3) \in M \mid \exists z \in \mathbb{Z} \text{ s.d. } z \cdot f + (2x^3) = 0 \} \checkmark$$

$$z \cdot f + (2X^3) = za_0 + za_1 X + za_2 X^2 + z \sum_{k=3}^{\infty} u_k X^k + (2x^3)$$

Da $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, gilt $za_i = 0$ g.d.w. $a_i = 0$ (*)

Für $z = 2$ gilt: $2 \cdot f + (2x^3) = 2a_0 + 2a_1 X + 2a_2 X^2 + \underbrace{2X^3 \sum_{k=3}^{\infty} u_k X^{k-3}}_{\in (2x^3)} + (2x^3)$

$$\Rightarrow 2 \cdot f + (2X^3) = 2a_0 + 2a_1 X + 2a_2 X^2 + (2x^3)$$

dann weiß ja $T(M) \subseteq \mathbb{Z}[x]$?

(*) D.h. $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ist notwendig für $f \in T(M)$. ✓

(*) $\Rightarrow T(M) = \{ \sum_{k=3}^{\infty} u_k X^k \mid u_k \in \{0,1\}, u_k = 0 \text{ f.f.a. } k \}$

Wieso das denn?

$r(M) = \infty$. Beweis:
$\not f$

~~[illegible]~~

Sei $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ ein l.u. System von Polynomen in M.

Da $n < \infty$, existiert $m = \max\{\deg(f_i) \mid i = 1,\dots,n\}$.

$\Rightarrow f_i \neq X^{m+1}$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, und $\nexists z \in \mathbb{Z}$ s.d. $\deg(z \cdot f_i) > m$. $\Rightarrow$ ich kann keine Linearkombination finden, die X^{m+1} erzeugt.

$\Rightarrow (f_i, X^{m+1})_{i=1,\dots,n}$ ist immer noch l.u.

Da dies für alle $n < \infty$ gilt, ist der Rang, also die Kard. eines max. l.u. Systems, unendlich.

Achtung: Ihr sollt den Rang von

$$M = \mathbb{Z}[X]/(2X^3) = \{ f + (2X^3) \mid f \in \mathbb{Z}[X] \}$$

bestimmen

$$(2X^3) := \mathbb{Z}[X] \cdot 2X^3 = \{ g \cdot 2X^3 \mid g \in \underline{\underline{\mathbb{Z}[X]}} \}$$

mittels ~~[illegible]~~ $r(M) = \dim_{Q(\mathbb{Z})} Q(M)$ findet man $= \dots = 3$.

1/6

③ $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

Seien $(m_i')_{i=1,\dots,k}$ und $(m_j'')_{j=1,\dots,l}$ mit $k = e(M')$ und $l = e(M'')$

Es gilt: $(f(m_i'))_{i=1,\dots,k}$ ist Erzeugendensystem von $\mathrm{im}(f)$

Sei $G = \mathrm{Lin}\{(m_j)_{j=1,\dots,l}\}$ wobei die m_j Urbilder der m_j'' unter g sind.

$\Rightarrow G \subset M$ Uler

Sei $m \in M$: $g(m) = m'' \in M''$

Sei x das Urbild von $m'' \in G$

$\Rightarrow m - x \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$

$\Rightarrow m - x \in \mathrm{Lin}((f(m_i'))_{i=1,\dots,k})$

$\Rightarrow m - x =: y$ ist als Linearkombination von $f(m_i')$ darstellbar

x ist als Linearkombination der m_j darstellbar ✓

$\Rightarrow m = x + y$ ist als Linearkombination der $(f(m_i'), m_j)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,l}}$ darstellbar ✓

$\Rightarrow$ Erzeugendensystem der Kardinalität $e(M') + e(M'')$ gefunden

$\Rightarrow$ minimales Erzeugendensystem hat höchstens diese Kardinalität ✓

ganz genau

Beispiel:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \; x \mapsto 2x$

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \; x \mapsto x \bmod (2)$

$e(\mathbb{Z}) = 1, \quad e(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 1$

$1 < 1 + 1$ qed

sehr gut

6/6

4. (1) Wohldefiniertheit der α_i:

Zu $\Lambda^i V$ ist per univ. Eig. eine Ass. $f_i : \underbrace{M \times \cdots \times M}_{i\text{-mal}} \to \Lambda^i V$

~~ggf~~ zugehörig.

Setze $g_i : \underbrace{\cancel{V} \times \cdots \times \cancel{V}}_{i\text{-mal}} \longrightarrow \Lambda^{i+1} V$,

$(w_1, \dots, w_i) \longmapsto v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_i$.

g_i ist n-linear und n-fach alternierend,

da $w_1 \wedge \dots \wedge w_i$ das ist und die $\wedge$-ierung

eines festen v daran nichts ändert. ✓

$\Rightarrow$ Nach der äusseren Eigenschaft der universellen Potenz gibt es einen Homomorphismus $\phi_i : \Lambda^n V \to \Lambda^{n+1} V$

mit $g_i = \phi_i \circ f_i$

$\Leftrightarrow \phi_i(f(w_1, \dots, w_i)) = g_i(w_1, \dots, w_i)$

$\Leftrightarrow \phi_i(w_1 \wedge \dots \wedge w_i) = v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_i$.

Setze $\phi_i =: \alpha_i$. $\square$ ✓

gut

(2) Exaktheit der Folge:

Zz: $\mathrm{im}(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Induktionsanfang: $\mathrm{im}(\alpha_0) = \{\lambda \underset{\in V}{v} \mid \lambda \in K\} = \mathrm{Lin}(v)$. ✓

$\ker(\alpha_1) = \{\underset{\in V}{w} \mid v \wedge w = 0\} = \{\lambda v \in V\} = \mathrm{Lin}(v)$. $\square$

Induktionsschritt: Zeige $\operatorname{im}(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$ für allgem. $i \in \{1, \ldots, ~~n~~ n-1\}$.

Dazu: Sei $(v_1 = v, v_2, \ldots, v_n)$ Basis von V

(per Basisergänzungssatz ~~von~~ zu (v) ergänzt)

Ein~~e~~ ~~Bi~~ ~~Basis~~ Erzs. von $\Lambda^i V$ ist von der Form $(w_1 \wedge \ldots \wedge w_i)$, ?

$(w_{j_1} \wedge \ldots \wedge w_{j_i})_{1 \le j_1 < \ldots \le j_i \le n}$ ist EZ.S.

wobei die $w_i \in V$ sind.

$\Rightarrow$ ein allgemeines ~~Basis~~ Erzs.-El. von $\Lambda^i V$ ~~ka~~ ist darstellbar als

$\sum_{k=1}^n \alpha_k^1 v_k \wedge \ldots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha_k^i v_k$, wobei die (α^j) jeweils

Systeme von n Skalaren aus K sind.

Um $\operatorname{im}(\alpha_i)$ zu erzeugen, sind wegen der Linearität

die Bilder ~~der~~ einer ~~Basis~~ Erzs. von $\Lambda^i V$ hinreichend.

$\rightarrow$ Betrachte $\alpha_i\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^1 v_k \wedge \ldots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha_k^i v_k\right)$

$$= v_1 \wedge \sum_{k=1}^n \alpha_k^1 v_k \wedge \ldots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha_k^i v_k$$

$$= v_1 \wedge \alpha_1^1 v_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k^1 v_k \wedge \ldots \wedge \alpha_1^i v_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k^i v_k$$

Nacheinander kann man jeden $\alpha_1^j v_1$-Term vom Rest seiner Summe „abefreien" (wg. Linearität des Λ-Produkts) und wegen $\lambda v \wedge v = 0$ verschwinden alle Vielfachen von v_1

$$= v_1 \wedge \sum_{k=2}^n \alpha_k^1 v_k \wedge \ldots \wedge \sum_{k=2}^n \alpha_k^i v_k$$

Alle Elemente dieser Form ✓
erzeugen $\operatorname{im}(\alpha_i)$.

Finde nun ein Erzs. von $\ker(\alpha_{i+1})$.

Betrachte dazu $\alpha_{i+1}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha^1_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^i_k v_k \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{i+1}_k v_k}_{=:\tilde{v} \in \Lambda^{i+1} V}\Big) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad v_1 \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{1}_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{i+1}_k v_k \} = 0$$

$\alpha_{i+1}(0) = 0$, also ist $0 \in \ker(\alpha_{i+1})$ (klar) $\Rightarrow$ OBDA $\tilde{v} \neq 0$

$v_1 \wedge \tilde{v} = 0$ wenn irgendein $\alpha^l_k = (\alpha^l_1, 0, \dots, 0)$,

denn $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$ wenn $\lambda v_i = v_j$ für $i \neq j$; und

da $v_1 \neq 0$ n.V. und $\tilde{v} \neq 0$, muss ein Faktor in $\tilde{v}$ ein Vielfaches von v_1 sein, damit $v_1 \wedge \tilde{v} = 0$ wird.

$$\Rightarrow \tilde{v} = \sum_{k=1}^n \alpha^1_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{l-1}_k v_k \wedge \alpha^l_1 v_1 \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{l+1}_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{i+1}_k v_k$$

Wegen der Eigenschaft des $\wedge$-Produktes kann ich $\alpha^l_1 v_1$ als ersten Faktor schreiben und ändere damit höchstens ein Vorzeichen $s \in \{\pm 1\}$

$$\Rightarrow \tilde{v} = s \cdot \alpha^l_1 \cdot v_1 \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^1_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{l-1}_k v_k \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{l+1}_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^{i+1}_k v_k$$

Mit Umnum. $l+1 \mapsto l, \dots, i+1 \mapsto i$ erhält man für einen allgem. Erzeuger des Kerns:

$$\tilde{v} = s \cdot \alpha^l_1 \cdot v_1 \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^1_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \alpha^i_k v_k$$

und mit demselben Argument wie bei $\mathrm{im}(\alpha_i)$ verschwinden die $\alpha^l_1 v_1$-Summanden in den Summen

$$\Rightarrow \tilde{v} = s \cdot \alpha^l_1 \cdot v_1 \wedge \sum_{k=2}^n \alpha^1_k v_k \wedge \dots \wedge \sum_{k=2}^n \alpha^i_k v_k$$

okay, passt, nicht die eleganteste Lösung, aber geht auch

Allg. Erzeuger von $\ker(\alpha_{i+1})$

Wir stellen fest: bis auf skalaren Vorfaktor ist dies gleich einem allg. Erzeuger von $\mathrm{im}(\alpha_i)$

$\Rightarrow \mathrm{im}(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$ $\square$ qed.

6/6