Saskia Ulans
Thomas Radeks
Jannis Schnitzer

| Σ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 22/24 | 4 | 6 | 6 | 6 |

# Übungen zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2012


Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. A. Holschbach


Blatt 11
Abgabetermin: Donnerstag, 05.07.2012, 9.15 Uhr

---

**Aufgabe 1.** *(Normalformen I)*
Bestimmen Sie die Frobenius'sche Normalform und die Weierstraß'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie die Weierstraß'sche Normalform und Jordan'sche Normalform von $A$, wenn $A$ als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$ aufgefasst wird.

**Aufgabe 2.** *(Normalformen II)*
Bestimmen Sie die Frobenius'sche Normalform und Weierstraß'sche Normalform der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie die Weierstraß'sche Normalform und Jordan'sche Normalform von $B$, wenn $B$ als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$ aufgefasst wird.

**Aufgabe 3.** *(Jordan'sche Normalform)*
Sei $A \in M_{5,5}(\mathbb{C})$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(t) = (t-2)^2(t-3)^3.$$

Welche Möglichkeiten ergeben sich für die Jordan'sche Normalform von $A$? Wie sehen die entsprechenden Invariantenteiler aus?

**Aufgabe 4.** *(Potenzen von Jordankästchen)*
Es sei $k$ ein Körper der Charakteristik 0, $f \in k[T]$ ein Polynom und $J \in M_{n,n}(k)$ ein Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda \in k$, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & & & & \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & & & \\ \frac{1}{2}f''(\lambda) & f'(\lambda) & f(\lambda) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) & \dots & \frac{1}{2}f''(\lambda) & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ die formalen Ableitungen von $f$.
*Hinweis.* Schreiben Sie $J = \lambda E + N$ und berechnen Sie zunächst die Potenzen von $J$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & t-1 & -t^2 \\ & 0 & 0 & \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$$

Invariantenteiler: $(tE - A) = \begin{pmatrix} t-5 & -6 & 3 \\ 1 & t & -1 \\ -1 & -2 & t+1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t-5 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & t+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ I\cdot(-t+5) \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & -t^2+5t-6 & t-2 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix}$$

Ausräumen
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t^2+5t-6 & t-2 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix} \overset{\text{Umsortieren}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & t-2 \\ 0 & t-2 & -t^2+5t-6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ I\cdot(-1) \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & t-2 \\ 0 & 0 & t^2-4t+4 \end{pmatrix}$$

Ausräumen
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Invariantenteiler: } 1,\ t-2,\ (t-2)^2 \checkmark$$

$\Rightarrow g_1(t) = t-2 \qquad g_2(t) = t^2-4t+4$

$\Rightarrow B_{g_1} = (2) \quad , \quad B_{g_2} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Frobeniussche Normalform: $A \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$

$\Rightarrow h_1(t) = t-2 = h_2(t) = h_3(t)$

Ihr dürft $(t-2)^2$ nicht außeinander ziehen.

$\Rightarrow B_{h_1} = B_{h_2} = B_{h_3} = (2)$

Ihr zerlegt lediglich jeden Invariantenteiler bis er als Primpotenzelement auftaucht.

Weierstraß'sche Normalform: $A \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⨍

$\Longrightarrow h_1(t) = (t-2),\ h_2(t) = (t-2)^2$

$A \approx \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 0 & -4 \\ & 1 & 4 \end{array}\right)$

Invariantenteiler bereits prim, damit keine Änderung in $\mathbb{C}$

Weierstraßsche Normalform unverändert

Jordansche Normalform: $A \approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \checkmark$

4/6

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q})$$

Dazu:
$$\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t & -3 & 0 \\ -1 & 1 & t-1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & t-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & 0 \\ t & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & t-1 \end{pmatrix}$$
$\cdot t$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & t^2-1 & -3 & 0 \\ 1 & t-1 & t-1 & 0 \\ 1 & t-1 & -3 & t-1 \end{pmatrix} \overset{\text{Ausräumen}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2-1 & -3 & 0 \\ 0 & t-1 & t-1 & 0 \\ 0 & t-1 & -3 & t-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & t^2-1 & 0 \\ 0 & t-1 & t-1 & 0 \\ 0 & -3 & t-1 & t-1 \end{pmatrix}$$
$\cdot(\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{3})$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t-\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -t^2 & t-1 \end{pmatrix} \underset{\text{Sortieren}}{\overset{\text{Ausräumen \&}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3}t-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Ausräumen}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & t-1 & \\ 0 & & & t^3-t^2+2t-2 \end{pmatrix}$$

Dazu: $t^3-t^2+2t-2 \div (t-1) = t^2+2$ (Da $x_0=1$ NS)
$-(t^3-t^2)$
$2t-2$
$-(2t-2)$
$0$

$\Rightarrow$ Invariantenteiler: $1, 1, (t-1), (t-1)(t^2+2)$

$\Rightarrow$ $g_1(t)=(t-1)$, $g_2(t)=t^3-t^2+2t-2$ / $h_1(t)=(t-1)$, $h_2(t)=(t-1)$, $h_3(t)=t^2+2$

$\rightarrow$ $B_{g_1}=(1)$ $B_{g_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B_{h_1}=(1)$ $B_{h_2}(1)$ $B_{h_3}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Frobenius NF: $B \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Weierstraß NF: $B \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

in $\mathbb{C}$ zerfällt $t^2+2$ in $(t+i\sqrt{2})(t-i\sqrt{2})$

$\rightarrow$ W NF: $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & i\sqrt{2} & \\ 0 & & & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Wenn alle Polynome Prim ist Jordan NF = W NF

gut 6/6

Die EW sind 2 (2x) und 3 (3x). $(t-2)$, $(t-3)$ sind prim.

$\Rightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 3 \end{pmatrix}$$

Für $s_1, s_2, s_3$ ~~[illegible]~~ kann jeweils 0 oder 1 eingesetzt werden. Es gibt somit acht Kombinationsmöglichkeiten für $(s_1, s_2, s_3)$:

$(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$.

Wegen der Eigenschaften der JNF (Eindeutigkeit bis auf Reihenfolge der JK) sind die JF mit $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ ~~ähnlich~~ konjugiert zueinander, ebenso die mit $(1,1,0)$ und $(1,0,1)$.

Die Inv.-Teiler müssen dann wie folgt aussehen:
(Ergibt sich aus den JK: die Breite der JK entspricht dem Potenz des entspr. Linfaktors $(t-\lambda)^k$)

| $(s_1, s_2, s_3)$ | Inv.-Teiler |
|---|---|
| $(0,0,0)$ | $1 \mid 1 \mid (t-3) \mid (t-2)(t-3) \mid (t-2)(t-3)$ ✓ |
| $(1,0,0)$ | $1 \mid 1 \mid (t-3) \mid (t-3) \mid (t-2)^2(t-3)$ ✓ |
| $(0,1,0)$<br>$(0,0,1)$ | $1 \mid 1 \mid 1 \mid (t-2)(t-3) \mid (t-2)(t-3)^2$ ✓ |
| $(1,1,0)$<br>$(1,0,1)$ | $1 \mid 1 \mid 1 \mid (t-3) \mid (t-2)^2(t-3)^2$ ✓ |
| $(0,1,1)$ | $1 \mid 1 \mid 1 \mid (t-2) \mid (t-2)(t-3)^3$ ✓ |
| $(1,1,1)$ | $1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid (t-2)^2(t-3)^3$ ✓ |

6/6

4. $J = \lambda E + N$, wobei $N$ die Matrix ist, bei der auf der ersten Nebendiagonalen Einsen stehen. (sonst Nullen)

~~Fun fact: Multiplikation einer Diag-Matrix mit ...~~

~~von N mit Diagonalmatrix~~

Fun fact: $N^k$ ist die Matrix, bei der auf der $k$-ten Nebendiagonalen Einsen stehen, sonst Nullen.
:)

genau so ist das.

Die Multiplikation $\lambda E \cdot N$ kommutiert, weil $E$ die Einheitsmatrix ist. ✓ Also kann für $J^k$ die binomische Formel angewandt werden kann:

$$J^k = (\lambda E + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda E)^{k-i} \cdot N^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^{k-i} N^i$$

mit $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$. ✓

Die formale $i$-te Ableitung von $\lambda^k$ ist (könnte man z.B. induktiv zeigen): $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-i+1) \cdot \lambda^{k-i}$

$$= \frac{k!}{(k-i)!} \lambda^{k-i} =: (\lambda^k)^{(i)}$$

$$\Rightarrow J^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} (\lambda^k)^{(i)} \cdot N^i. ✓$$

Nice

Dies verallgemeinert sich durch die Linearität der formalen Ableitung ✓ eines Polynoms und der Tatsache, dass ein Polynom immer wie $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ aussieht, auf

dieser Schritt ist ein wenig schnell. Aber in der Tat wenn man das Ergebnis kennt kann man das sehen.

$$f(J) = E \cdot f(\lambda) + N \cdot f'(\lambda) + \frac{1}{2!} f''(\lambda) N^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\lambda) \cdot N^{(n-1)}.$$

Das entspricht der angegebenen Form. ✓

gut

6/6