LA II – Zettel 1 | Fandis Schnitzer / Thomas Rudzki

1	2	3	4	Σ
2	4	4	4	14/24

① a) V ist ein $\mathbb{C}$-VR:

nicht leer: Nullelement enthalten, setze $a_{-n} = \ldots a_n = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

abgeschloßen bzgl. +

$f, g \in V$

z.z. $f + g = h \in V$

$$f(x) + g(x) = \sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx} + \sum_{-n}^{n} b_k e^{ikx}$$
$$= \sum_{-n}^{n} (a_k e^{ikx} + b_k e^{ikx})$$
$$= \sum_{-n}^{n} ((a_k + b_k) e^{ikx})$$
$$= \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = h(x) \quad \text{wobei } c_k = a_k + c_k$$

✓

abgeschloßen bzgl. ·

$\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in V$

z.z. $\alpha f \in V$

$$\alpha f(x) = \alpha \left(\sum_{-n}^{n} a_k e^{ikx}\right) = \sum_{-n}^{n} \alpha a_k e^{ikx} = \sum_{-n}^{n} b_k e^{ikx}$$

$b_k = \alpha a_k$

$b_k \in \mathbb{C}$, da K.p. abgeschl. ✓

Das tut mir leid, das hattet ihr gar nicht zeigen müssen. Ihr hatten voraussetzen dürfen, das V VR ist.

positiv def.: $h(v,v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) \bar{v}(x)\, dx$

$h(v,v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\bar{v}(x)^2}\, dx \longrightarrow |v(x)|^2$ Betragsquadrat wenn schon

$(\Leftarrow)\ \mathscr{Z}\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \cdot \sum_{j=-n}^{j} \overline{a_k} e^{-ijx}$ } das ist keine Aussage, daher könnt ihr das nicht mit logischen Operatoren verknüpfen (wie „$\Rightarrow$“, „$\Leftrightarrow$“ ..)

$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} |a_k^2| e^0$

$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_n^2|^2 + \ldots + |a_{-n}^2|^2$

$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{2\pi} \cancel{\int} |a_n|^2 + \ldots + |a_{-n}^2|^2 x \Big|_0^{2\pi}$

$(\Leftrightarrow)\ \frac{1}{2\pi} (|a_n|^2 + \ldots + |a_{-n}^2|^2) = |a_n^2|^2 + \ldots + |a_{-n}^2|^2 > 0$ qed

Die Idee passt, denn es gilt

$$\left\| \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \right\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2$$

aber die Begründung unterschlagt ihr ein wenig. Und bitte auf die Betragsquadrate achten!

1 f) sesquilinear $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in V$

$$h(\alpha f_1 + f_2, g_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha f_1(x) + f_2(x)) \overline{g_1(x)}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha f_1(x) \overline{g_1(x)} + f_2(x) \overline{g_1(x)})\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha f_1(x) \overline{g_1(x)}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \overline{g_1(x)}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \alpha \int_0^{2\pi} f_1(x) \overline{g_1(x)}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x) \overline{g_1(x)}\, dx$$
$$= \alpha\, h(f_1, g_1) + h(f_2, g_1) \quad \checkmark$$

$$h(f_1, \beta g_1 + g_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) \left(\overline{\beta g_1(x) + g_2(x)} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) \overline{\beta}\, \overline{g_1(x)} + f_1(x) \overline{g_2(x)}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \overline{\beta} \int_0^{2\pi} f_1(x) \overline{g_1(x)}\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) \overline{g_2(x)}\, dx$$
$$= \overline{\beta}\, h(f_1, g_1) + h(f_1, g_2)$$

das β muss aber schon komplex konjugiert sein (Semilinearität)

hermitisch: $\forall\, v, w \in V: \; h(f,g) = \overline{h(g,f)}$

$$h(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(x)}\, f(x)\, dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \overline{f(x)}\, dx}$$
$$= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \overline{f(x)}} = \overline{h(g,f)} \quad \text{q.e.d.} \quad \checkmark$$

gut

zu 1 $\quad$ 2/6

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{C})$

Eigenwerte: $\det(tE_2 - A) \Rightarrow \det\begin{pmatrix} t-4 & -(1+i) \\ i-1 & t-3 \end{pmatrix}$

$= (t-4)(t-3) + (1+i)(1-i)$

$= (t^2-7t+12) + (i^2-1)$

$= t^2 - 7t + 10$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$

$\Rightarrow t_1 = 5$ und $t_2 = 2$ ✓ gut

für EV: $t_1 = 5$ $\begin{pmatrix} 1 & -(1+i) \\ i-1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow x_1 = (1+i)x_2$

$\Rightarrow (i-1)x_1 = -2x_2$

$i^2-1 \quad x_1 = -2(i+1)x_2$

$\frac{-2}{-2} \quad x_1 = (i+1)x_2$

$x_1 = (1+i)x_2$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓ $v_1 \longrightarrow \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$t_2 = 2$ $\begin{pmatrix} -2 & -(1+i) \\ (i-1) & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -2x_1 = (i+1)x_2$

$-2(i-1)x_1 = (i^2-1)x_2$

$(i-1)x_1 = x_2$

$\Rightarrow (i-1)x_1 = x_2$

$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ ✓ $v_2 \longrightarrow \frac{v_2}{\|v_2\|}$

$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}$

U ist nicht unitär! Ihr müsst die EV normieren.

$U^*U \neq E$

$U^*AU \neq \text{diag}(2,5)$

4/6

③ a) z.z. $\ker(\varphi^*) = (\operatorname{im}(\varphi))^\perp$

Setze $v \in \ker(\varphi^*)$ und $w \in V$ beliebig

$\Rightarrow \varphi^*(v) = 0 \Rightarrow h(\varphi^*(v), w) = 0$ | da $\varphi^*(v) = 0$

$\xRightarrow{\text{Def/Lemma 0.8}} h(v, \varphi(w)) = 0$

$\Rightarrow v \perp \varphi(w)$

Da $\varphi(w) \in \operatorname{im}(\varphi)$ beliebig $\Rightarrow \underbrace{\ker(\varphi^*) \perp \operatorname{im}(\varphi)}$ qed

das heißt nur, dass $\ker(\varphi^*)$ senkrecht auf $\operatorname{im}(\varphi)$ steht, aber das heißt noch nicht $\ker(\varphi^*) = (\operatorname{im}(\varphi))^\perp$

z.z. $(\ker(\varphi))^\perp = \operatorname{im}(\varphi^*)$

Setze $v \in \ker(\varphi)$ und $w \in V$ beliebig

$\Rightarrow \varphi(v) = 0 \Rightarrow h(\varphi(v), w) = 0$

$\xRightarrow{\text{Def/Lemma 0.8}} h(v, \varphi^*(w)) = 0$

$\Rightarrow v \perp \varphi^*(w)$

Da $\varphi^*(w) \in \operatorname{im}(\varphi^*)$ beliebig $\Rightarrow \underbrace{\ker(\varphi) \perp \operatorname{im}(\varphi^*)}_{\text{siehe oben}}$ qed

(im Prinzip ist ja fast alles gezeigt aber Orthogonalität ist noch nicht gleich orthogonales Komplement.

b) z.z. $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^*)$ wenn φ normal

Es gilt $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ (wg. φ normal) ①

Setze $v \in \ker(\varphi^*) \Rightarrow (\varphi \circ \varphi^*)(v) = \varphi(\varphi^*(v)) = \varphi(0) = 0$
da $\varphi \in \operatorname{End}(V)$

$\Rightarrow 0 = (\varphi^* \circ \varphi)(v)$ (wg. ①)

$\Rightarrow \varphi(v) \in \ker(\varphi^*)$

Da $\operatorname{im}(\varphi) \perp \ker(\varphi^*)$ (siehe 3a) ✓

$\Rightarrow \varphi(v) = 0$ ✓

$\Rightarrow \ker(\varphi) = \ker(\varphi^*)$ qed ✓ das stimmt. Probiert aber die Äquivalenz der Aussage („$\Leftrightarrow$") deutlicher heraus zu arbeiten.

Dimensionsformel:

$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi))$

Wir wissen $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^*)$

und $\ker(\varphi^*) \perp \operatorname{im}(\varphi)$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $V = \ker(\varphi^*) \hat{\oplus} \operatorname{im}(\varphi)$

$= \ker(\varphi) \hat{\oplus} \operatorname{im}(\varphi)$ qed ✓ okay

4/6

4 a) $h(f(v), f(w)) = \lambda\bar{\mu} \cdot h(v,w)$

$h(f(v), f(w)) = h(v, f^*(f(w)))$

$= h(v, f(f^*(w)))$

$= h(f^*(v), f^*(w))$

$= \bar{\lambda} \cdot \bar{\bar{\mu}}\, h(v,w)$

$= \bar{\lambda} \cdot \mu\, h(v,w)$

$\Rightarrow h(v,w) = 0$ oder $\lambda\bar{\mu} = \bar{\lambda}\mu$

Da λ, μ unterschiedlich, muß $h(v,w) = 0$ sein $\Rightarrow v \perp w$ qed ✓

b) Sei ~~…~~ $v \in V_\lambda \Rightarrow f(v) = \lambda v$

$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) \overset{g \text{ linear}}{=} \lambda g(v)$

$\Rightarrow g(v)$ ist EV zu f zum EW λ

$\Rightarrow g(v) \in V_\lambda$

$\Rightarrow g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ ✓ gut

Aus a) folgt sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ EW zu f, so gilt:

$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ für $i \neq j \Rightarrow V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ ✓

Betrachte: (V_λ, h) sowie $g|_{V_\lambda} \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ (*)

$\Rightarrow \exists$ ONB $(v_1, \dots, v_n)$ zu (V_λ, h) aus EV zu g du betrachtest doch zunächst nur

Alle Element aus V_λ, also insbesondere auch die $(v_1, \dots, v_n)$ sind

EV von f $g|_{V_\lambda}$?

$\Rightarrow$ Die Kombination der ONB aus EV von g erhalten aus allen V_λ

besteht auch sämtlich aus EV von f qed ✓

4/6

(*) Streng genommen müsste man hierfür noch

$g^*(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ zeigen!