Lineare Algebra – Blatt 09

Jannis Schnitzer
Lukas Beichert

14.12.2011

Tutor: Philipp Schill

1	2	3	4	Σ
5	6	5	2	18

Aufg 1

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ damit $A \cdot e_1 = \phi(e_1), \dots, A \cdot e_3 = \phi(e_3)$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

b) $\phi(v_1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$ ✓ ✓ $(= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3)$

$\phi(v_2) = A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} v_1$ ✓ ✓ $(= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3)$

$\phi(v_3) = A \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ ✓

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ damit $(= 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3)$

$\Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$; $B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aussage über Rang fehlt. −1

5/6

Aufg. 2

a) $f: U \to V$; $g: V \to W$; $g \circ f: U \to W$

−0,5

$f^*: \overset{V^*}{U^*} \to \overset{U^*}{V^*}$; $\varphi \mapsto \varphi \circ f$

$g^*: \overset{W^*}{V^*} \to \overset{V^*}{W^*}$; $\varphi \mapsto \varphi \circ g$

$(g \circ f)^*: \overset{W^*}{U^*} \to \overset{U^*}{W^*}$; $\varphi \mapsto \varphi \circ (g \circ f)$

ZZ: $(f^* \circ g^*)(\varphi) = (g \circ f)^*(\varphi)$

Bew: $(f^* \circ g^*)(\varphi) = f^*(g^*(\varphi)) = f^*(\varphi \circ g) = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ g \circ f$ ✓

$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = \varphi \circ g \circ f$ □

b) ZZ: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$A \cdot B =: C$

$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = c_{ji}^t$

$b_{ji}^t = b_{ij}$, $a_{ji}^t = a_{ij}$

$(B^t \cdot A^t) =: C'$

$c'_{ij} = \sum_{s=1}^{n} b_{is}^t \cdot a_{sj}^t = \sum_{s=1}^{n} b_{si} \cdot a_{js} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} \cdot b_{si} = c_{ji} = c_{ij}^t$

$\Rightarrow$ $C' = C^t$ bzw $B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$ ✓ □

6/6

Auf 3

$f: K^n \longrightarrow K^n$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$

$\pi: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

ZZ: f ist linear, ist isomorphismus

$\Rightarrow$ $f(\bar{x} + \bar{y}) \overset{!}{=} f(\bar{x}) + f(\bar{y})$

Bew:

Sei $z_i = (x_i + y_i)$

$f(\bar{x} + \bar{y}) = f((x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)) = f((z_1, \dots, z_n))$

$= (z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = (x_{\pi(1)} + y_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)} + y_{\pi(n)})$

$= (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) + (y_{\pi(1)}, \dots, y_{\pi(n)})$

$= f(\bar{x}) + f(\bar{y})$ □ ✓

$f(a \cdot \bar{x}) = f((a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)) = (a \cdot x_{\pi(1)}, \dots, a \cdot x_{\pi(n)})$ ✓

$= a \cdot f(x)$ □

Da π bijektiv ist lässt sich leicht die Umkehrabb. zu f finden.

$f^{-1}: K^n \longrightarrow K^n$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(n)})$

(π^{-1} ist die Umkehrabb zu π) Die Umkehrabb. hinschreiben reicht nicht, es muss auch gezeigt werden, dass sie Umkehrabb. ist. −1

$\longrightarrow$ f ist isomorphismus

$$M(f_\pi)_{ij} = \underbrace{\delta_{i,\pi(i)}}_{\delta_{j,\pi(i)}} \quad \left(\text{da } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = \pi(i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$$

5/6

Auf. 4

ZZ: ~~Es~~ Es ex. Basis $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V bezgl der die Koord.matrix von π die Gestalt hat

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bew: Nach Satz 3.21:

Es ex eine Matrix der Form

$$\underbrace{M_{\underline{v}}^{\underline{v}}}_{M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n = \dim V$$

Bleibt ZZ: $\underline{v}' = \underline{v}$

Da π idempotent ist ~~gilt~~ muss gelten:

$$M_{\underline{v}'}^{(\underline{v})_1}(\pi) \cdot M_{(\underline{v}')_2}^{\underline{v}}(\pi) \overset{f}{=} M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}(\pi \circ \pi) \overset{!}{=} M_{\underline{v}'}^{\underline{v}}(\pi)$$

Das geht nur wenn bei (1) und (2) dieselbe Basis steht.

Nach Lemma 3.11 gilt das wenn $\underline{v} = \underline{v}'$

$\Rightarrow$ Es ex eine Basis $\underline{v}$ von V mit

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\pi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M ist $n \times n$-Matrix mit $n = \dim V$

So funktioniert der Beweis nicht. 2/6