Lineare Algebra – Blatt 6

~~[illegible]~~ Jannis Schnitzer, Lukas Beichert

1	2	3	4	Σ
6	6	6	6	24

23.11.2011

Auf. 1

Beweise bitte vollständig!

zz: $f_i(a+b) = f_i(a) + f_i(b)$, $a,b \in V_K$ $c \in K$

und $f_i(c \cdot a) = c \cdot f_i(a)$

a) $f_1(a+b) = (a+b, a+b+1) = f(a) + \underbrace{(b,b)}^{\neq f(b)}$ ↯ (✓) ⇒ nicht linear

b) $f_2(a+b) = ((a+b), (-(a+b))) = (a_2, (-a_1)) + (b_2, (-b_1)) = f(a) + f(b)$ ✓ ✓

$f_2(c \cdot a) = (c \cdot a_2, -(c \cdot a_1)) = c(a_2, (-a_1)) = c \cdot f(a)$ ✓ ✓ ⇒ linear

c) sei $a = x + iy$ $b = x' + iy'$ $c = b$ $(x', y', x, y \in \mathbb{R})$ y'?

$f_3(a+b) = f_3((x+x') + i(y+y')) = x + x' - i(y+y') = x - iy + x' - iy'$

$= f(a) + f(b)$ ✓ ✓

$f_3(c \cdot a) = f((xx' - yy') + i(xy' + x'y)) = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$

$= (x - iy) \cdot (x' - iy') = f(a) \cdot f(b) \neq a \cdot f(b)$ ↯ (✓) ⇒ nicht linear

für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

d) $f_4(a+b)$: siehe f_3 ✓ ✓

$r \in \mathbb{R}$ $f_4(r \cdot a) = f_4(rx + iyr) = rx - iyr = r \cdot (x - iy) = r \cdot f(a)$ ✓ ✓ ⇒ linear

6/6

Auf. 2

U: zz: U ist Unter-VR von Abb(M, K)

↳ 1.) zz U ist Untergruppe von Abb(M, K)

i) neutrales Element von Abb(M, K) ist $\in U$

$e = 0 : M \to K$, $m \mapsto 0$

$0(m) = 0$ für alle $m \Rightarrow 0 \in U$ ✓ ✓

ii) $f(m_0) + g(m_0) \overset{!}{=} 0$

da $f(m_0) = 0$ und $g(m_0) = 0$

ist $f(m_0) + g(m_0) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow (f+g) \in U$ ✓ ✓

iii) $f^{-1}(m_0) \overset{!}{=} 0$

$0 = (f + f^{-1})(m_0) = \underbrace{f(m_0)}_{=0} + f^{-1}(m_0) = f^{-1}(m_0)$ (✓) ✓

2.) ZZ: $\lambda \cdot f \in U$ $\quad f \in U, \lambda \in K$

$f(m_0) = 0$

$\lambda \cdot f \in U$ (✓)

$\Leftrightarrow \quad \lambda \cdot f(m_0) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \lambda \cdot \cancel{f(m_0)} \in U$

V: 1.) Untergruppe

i) $0 \overset{!}{\in} V$; $\quad 0(m_0) = 0$ für alle $m \in M$ ✓

$\Rightarrow$ 0 ist const. also $\in V$

ii) $(f+g) \overset{!}{\in} V \qquad f, g \in V \qquad m, n \in M$

$(f+g)(m) = f(m) + g(m) \underset{\text{da } f, g \text{ const.}}{=} f(n) + g(n) = (f+g)(n)$ ✓ $\square$

iii) $f^{-1} \overset{!}{\in} V$ also $f^{-1}(a) \overset{!}{=} f^{-1}(b)$ mit $a, b \in M$

$f(a) + f^{-1}(a) = 0 = f(b) + f^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow \quad f(a) + f^{-1}(a) = f(a) + f^{-1}(b) \quad |$ da $f(a) = f(b)$

$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(a) = f^{-1}(b)$ ✓ $\square$ $\quad |$ kürze

iv) $\lambda \cdot f \overset{!}{\in} V$ also $\lambda \cdot f(a) = \lambda \cdot f(b) \qquad f \in V \quad a, b \in M$

$f(a) = f(b) \quad | \cdot \lambda$

$\lambda \cdot f(a) = \lambda f(b)$ $\square$ ✓

ZZ: $U \cap V = \{0\}$

Bew: Es gibt nur 1 $f \in V$ mit $f(m) = 0 \;\forall m \in M$

Dieses f liegt in U, da $f(m_0) = 0$ (✓)

$\Rightarrow$ Die Abb f ist def. mit $f: M \to K, \; m \mapsto 0$

Das ist die Nullabb. 0 $\square$

27

ZZ: $U + V = \mathrm{Abb}(M, K)$

Bew: ~~ZZ~~ $U + V = \{ f_1 + f_2 \mid f_1 \in U, f_2 \in V \}$

Alle Abb. von $M \setminus m_0$ nach K liegen in U.

Durch Addition einer konst. Abb können diese Abbildungen auch ~~an~~ bei m_0 jeden möglichen Wert annehmen. ok

$\Rightarrow U + V = \mathrm{Abb}(M, K)$ (✓)

~~ZZ~~ Insbesondere ist $f: U \oplus V \to \underbrace{\mathrm{Abb}(M, K)}_{= U+V}$ isomorph, da $U \cap V = \{0\}$ (Lemma 2.7). ✓

6/6

Auf. 3

a) ZZ: $(f+g)^* = f^* + g^*$ $\qquad f, g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$

$(f+g)^* = (\xi \longmapsto \xi \circ (f+g))$

$f^* + g^* = (\xi \mapsto \xi \circ f) + (\xi \mapsto \xi \circ g)$

$= (\xi \mapsto (\xi \circ f + \xi \circ g))$

$= \xi \longmapsto (\xi \circ (f+g))$ da $\xi \in V^*$, also linear

$= (f+g)^*$ □ ok

b) Nach Lemma 1.39 ist f^* injektiv, wenn $\ker(f^*) = \{e_{V^*}\} = \{0\}$

$0: V^* \to K$
$v \mapsto 0$

f ist surj., also $\mathrm{im}(f) = V$

$\ker(f^*) = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi \circ f = 0 \}$

~~Daraus~~ da $\mathrm{im}(f) = V$ muss für φ gelten: $\varphi: V \to K$, $v \mapsto 0$

Das entspricht der Def. der 0-Abb. φ ist also gleich 0.

Da $\ker(f^*) = \{0\}$ ist f^* injektiv. ✓

6/6

13

Auf. 4

- ZZ: $\ker(\varphi) = U_1 \cap U_2$

Bew: $u_1 \in \ker(\varphi)$ wenn $u_1 + U_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = -u_2$ $\forall u_2 \in U_2$ für ein $u_2 \in U_2$ -0,5

$\Rightarrow u_1 \in U_2$

Jeder u_1 im $\ker(\varphi)$ ist $\in U_1 \cap U_2$ // d.h. $\ker(\varphi) \subseteq U_1 \cap U_2$ -0,5

- ZZ: φ ist surjektiv

Bew:

Ein bel Element von $(U_1+U_2)/U_2$ hat die Form

$(u_1+u_2)+U_2$ mit $u_1 \in U_1$ u. $u_2 \in U_2$

$\Rightarrow u_1 \in U_1$ mit $\varphi(u_1) = u_1 + U_2 = u_1 + (u_2 + U_2) = (u_1+u_2) + U_2$

$\Rightarrow \varphi$ ist surj. ✓

ZZ: φ ist linear also $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ $u_1, u_2 \in U_1$

und $\lambda \cdot \varphi(u_1) = \varphi(\lambda \cdot u_1)$ $\lambda \in K$

Bew: $\varphi(u_1+u_2) = (u_1+u_2) + U_2$

$\varphi(u_1) + \varphi(u_2) = (u_1 + U_2) + (u_2 + U_2) = (u_1+u_2) + U_2$ ✓

$\lambda \varphi(u_1) = \lambda(u_1 + U_2) = \lambda u_1 + U_2 = \varphi(\lambda u_1)$ ✓

$\Rightarrow$ linear ✓

- Konstruktion VR-Isomorph. $\tilde{\varphi}$

$U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1+U_2)/U_2$, $u + U_1 \cap U_2 \mapsto u + U_2$

$\tilde{\varphi}: U/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}(\varphi)$

$(U_1 \cap U_2) = \ker(\varphi)$ und $(U_1+U_2)/U_2 = \operatorname{im}(\varphi)$ da φ surj. ✓

4

6/6