Lukas Beichert, Jannis Andrija Schnitzer

Tutor: Philip Schill ; Do 16^{00}

1	2	3	4	Σ
6	3	5	5	19

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2011/12

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. M. Witte

Blatt 4
Abgabetermin: Donnerstag, 10.11.2011, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Permutationen)*

(a) Gegeben seien die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

in der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$. Bestimmen Sie $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} und $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$.

(b) Bestimmen Sie alle $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

123
123 132 | 321 231 213 312

Aufgabe 2. *(Restklassen)*

$\bar 2 \cdot \bar 2^{-1} = \bar 1$ 213 · 321 312 231 $\bar 3^4 = \bar 1$

$\bar 2 \cdot \bar 3 = \bar 6 = \bar 1$

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\bar 3 \cdot (\bar 4 + \bar 2^{-1}), \qquad \bar 3^{12354546767456}.$$

$-\bar 2 = \bar 3$

$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x^3 = \bar 1$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

1

$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. *(Direkte Produkte von Gruppen und Ringen)*

(a) Sind G_1, G_2 Gruppen, so sei auf $G = G_1 \times G_2$ die komponentenweise Verknüpfung erklärt:

$$(g_1, g_2) * (h_1, h_2) := (g_1 * h_1, g_2 * h_2).$$

Zeigen Sie: G ist eine Gruppe. G ist genau dann abelsch, wenn G_1 und G_2 abelsch sind.

(b) Sind R_1, R_2 Ringe, so sei auf $R = R_1 \times R_2$ die komponentenweise Addition und Multiplikation erklärt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2).$$

Zeigen Sie: R ist ein Ring. R ist genau dann kommutativ, wenn R_1 und R_2 kommutativ sind. R ist unitär, wenn R_1 und R_2 unitär sind.

Aufgabe 4. *(Körper)*
Zeigen Sie, daß die Menge aller reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ zusammen mit der Addition und Multiplikation reeller Zahlen einen Körper bildet.

$x^3 = 3k+1$

$x = \sqrt[3]{3k+1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$n \mid (a-b)$

$a, b \in \overline{a-b}$

3

$k \cdot n = x^3 - 1$

$n \mid x^3 - 1$

$x^3 \sim 1 \Rightarrow n \mid (x^3 - 1)$

$3k = x^3 - 1$

Lineare Algebra I, 4. Übungsblatt

1. (a)

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} ✓$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ✓$$

$$\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ✓$$

(b)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ✓$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ✓$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ✓$$

6/6

2. (a)(i) $\bar{3} \cdot (\bar{4} + \bar{2}^{-1})$ NR: $\bar{2}^{-1} \cdot \bar{2} \overset{!}{=} \bar{1} \Rightarrow \bar{2}^{-1} = \bar{3}$

$\Leftrightarrow$

$\bar{3} \cdot (\bar{4} + \bar{3}) = \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$ ✓

(a)(ii) $\bar{3}^{\,12354546767456}$.

Bem: $(\bar{3} \cdot \bar{3}) \cdot (\bar{3} \cdot \bar{3}) = \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1} = \bar{3}^4$.

$12354546767456 =: e$

$e = 56 + (e - 56)$ Bem.: $(e-56) = 123\ldots400$

$e = 4 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$ da $4 \mid 56$ und $4 \mid 100 \cdot m = (e-56)$

$\Rightarrow \bar{3}^e = \bar{3}^{4 \cdot k} = (\bar{3}^4)^k = \bar{1}^k = \bar{1}$ ✓

(b) $x^3 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$x^3 - 1 = 3z$ für $z \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$

$x^3 = 3z + 1$

$\Leftrightarrow$

$x = \sqrt[3]{3z+1} \Rightarrow L = \{x \mid x = \sqrt[3]{3z+1}$ für $z \in \mathbb{Z}\}$ f

Für $z = 2$ ist $\sqrt[3]{3z+1}$ weder ein Element aus $\mathbb{Z}$ noch aus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$x^3 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

analog $L = \{x \mid x = \sqrt[3]{5z+1}$ für $z \in \mathbb{Z}\}$ f

−3

$x^3 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

analog $L = \{x \mid x = \sqrt[3]{7z+1}$ für $z \in \mathbb{Z}\}$ f

3/6

3. (a) Sei G_1, G_2 Gruppen.

$G = G_1 \times G_2$; $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) := (g_1 * h_1, g_2 * h_2)$

(i) Zz: G ist Gruppe

(G1) $L := (g_1, g_2) * ((h_1, h_2) * (k_1, k_2))$ für $(g_1, g_2), (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in G$

$\overset{!}{=} ((g_1, g_2) * (h_1, h_2)) * (k_1, k_2) =: R$

$L = (g_1, g_2) * (h_1 * k_1, h_2 * k_2)$

$= (g_1 * (h_1 * k_1), g_2 * (h_2 * k_2))$

$\overset{G_1, G_2 \text{ Gruppen}}{=} ((g_1 * h_1) * k_1, (g_2 * h_2) * k_2)$ ✓

$= (g_1 * h_1, g_2 * h_2) * (k_1, k_2)$

$= ((g_1, g_2) * (h_1, h_2)) * (k_1, k_2) \overset{\text{def}}{=} R$ ✓ $\square$

(G2) $e * (g_1, g_2) \overset{!}{=} (g_1, g_2)$ mit $e, (g_1, g_2) \in G$

$e := (e_1, e_2)$; e_1 sei neutr. El. aus G_1, e_2 — " — G_2 } existieren da G_1, G_2 Gruppen ✓

$e * (g_1, g_2) = (e_1 * g_1, e_2 * g_2) = (g_1, g_2)$ ✓ $\square$

(G3) $\forall g \in G\ \exists h \in G$ mit $h * g = e$

Zz: $h * (g_1, g_2) = (e_1, e_2)$

$h := (h_1, h_2)$ $\begin{cases} h_1 \text{ sei } (g_1)^{-1} \in G_1 \\ h_2 \text{ sei } (g_2)^{-1} \in G_2 \end{cases}$ ex., da G_1, G_2 Gruppen ✓

$h * (g_1, g_2) = (g_1^{-1} * g_1, g_2^{-1} * g_2) = (e_1, e_2)$ ✓ $\square$

($\Rightarrow$ G ist Gruppe)

(G4) Zz: G_1, G_2 abelsch $\Leftrightarrow$ G abelsch

"$\Rightarrow$" $g_1 * h_1 = h_1 * g_1 \wedge g_2 * h_2 = h_2 * g_2 \Rightarrow (g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 * h_2) \overset{G_1, G_2 \text{ abelsch}}{=} (h_1 * g_1, h_2 * g_2) = (h_1, h_2) * (g_1, g_2)$ ✓ ✓

"$\Leftarrow$" $(g_1, g_2) * (h_1, h_2) = (h_1, h_2) * (g_1, g_2) \Leftrightarrow (g_1 * h_1, g_2 * h_2) = (h_1 * g_1, h_2 * g_2)$

aus $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$ $\Rightarrow$ $g_1 * h_1 = h_1 * g_1 \wedge g_2 * h_2 = h_2 * g_2$ ✓

$\square$

(b) $(R, +_R, (0_{R_1}, 0_{R_2}) \in R_1 \times R_2)$ sowie

$(R, \cdot_R, (1_{R_1}, 1_{R_2}) \in R_1, R_2)$ erfüllen alle Bedingungen

nur für unitäre Ringe gegeben

aus (a). Somit gilt

(R1) $(R, +_R, (0_{R_1}, 0_{R_2}))$ ist eine Gruppe, sie ist genau dann abelsch, wenn ~~...~~ ~~assoziativ~~ sind. $(R_1, +_{R_1}, 0_{R_1})$ und $(R_2, +_{R_2}, 0_{R_2})$ abelsch sind. Da R_1, R_2 Ringe, ist dies gegeben.

(R2) (Assoziativität für $(R, \cdot_R, (1_{R_1}, 1_{R_2}))$): Ergibt sich daraus, dass $(R, \cdot_R, (1_{R_1}, 1_{R_2}))$ eine Gruppe wie in (a) f (Gruppe benötigt auch das multiplikative Inverse)

−1

Im Folgenden immer: $a_n, b_n, c_n \in R_n$

(R3) ~~...~~ $(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2))$

$$\overset{!}{=} (a_1, a_2)(b_1, b_2) + (a_1, a_2)(c_1, c_2)$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) =$$

$$(a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2)) = \quad R_1, R_2 \text{ Ringe}$$

$$(a_1 b_1 + a_1 c_1, a_2 b_2 + a_2 c_2) =$$

$$(a_1 b_1, a_2 b_2) + (a_1 c_1, a_2 c_2)$$

$$= (a_1, a_2)(b_1, b_2) + (a_1, a_2)(c_1, c_2)$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) \overset{!}{=} (a_1, a_2)(c_1, c_2) + (b_1, b_2)(c_1, c_2)$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) =$$

$$((a_1 + b_1) c_1, (a_2 + b_2) c_2) = \quad R_1, R_2 \text{ Ringe}$$

$$(a_1 c_1 + b_1 c_1, a_2 c_2 + b_2 c_2) =$$

$$(a_1, a_2)(c_1, c_2) + (b_1, b_2)(c_1, c_2) \quad \square$$

Kommutativität (R5): $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \overset{!}{=} (b_1, b_2)(a_1, a_2)$

~~Bed~~ $\Leftrightarrow (a_1 b_1, a_2 b_2) \overset{!}{=} (b_1 a_1, b_2 a_2)$

(es soll Äquivalenz gezeigt werden) $\Leftrightarrow$ R_1 kommutiert, dann $a_1 b_1 = b_1 a_1 \wedge$ R_2 kommutiert, dann $a_2 b_2 = b_2 a_2$ $\square$

Unitarität (R4): Wenn R_1, R_2 unitär $\Rightarrow \exists\, 1_{R_1} \in R_1, 1_{R_2} \in R_2$ mit

$$1_{R_1} a_1 = a_1 = a_1 \cdot 1_{R_1}$$
$$1_{R_2} a_2 = a_2 = a_2 \cdot 1_{R_2}$$

$$\Rightarrow 1_R := (1_{R_1}, 1_{R_2})$$

$$1_R \cdot (a_1, a_2) = (1_{R_1} a_1, 1_{R_2} a_2) = (a_1, a_2)$$

$$(a_1, a_2) \cdot 1_R = (a_1 \cdot 1_{R_1}, a_2 \cdot 1_{R_2}) = (a_1, a_2) \quad \square$$ ✓

5/6

Von HIER ↓

~~4. $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{R}\}$~~

Zeige zunächst: $(M, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ ist kommutativer, unitärer Ring.

i.F.: $(a_n + b_n\sqrt{3}) \in M$ $\forall n$

(R1): $(M, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ ist abelsche Gruppe

$$(G1): ((a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3})) + (a_3 + b_3\sqrt{3}) \stackrel{!}{=} (a_1 + b_1\sqrt{3}) + ((a_2 + b_2\sqrt{3}) + (a_3 + b_3\sqrt{3}))$$

$$((a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3})) + (a_3 + b_3\sqrt{3})$$
$$= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}) + (a_3 + b_3\sqrt{3})$$

$M \subset \mathbb{R}$, $+_{\mathbb{R}}$ ist assoz. $= (a_1 + a_2 + a_3 + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{3})$

$$= (a_1 + b_1\sqrt{3}) + ((a_2 + b_2\sqrt{3}) + (a_3 + b_3\sqrt{3})) \checkmark$$

$$(G2): 0_{\mathbb{R}} + (a_1 + b_1\sqrt{3}) \stackrel{!}{=} a_1 + b_1\sqrt{3}$$

$$0 = 0 + 0\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 0 + (a_1 + b_1\sqrt{3}) = a_1 + 0 + (b_1 + 0)\sqrt{3} = a_1 + b_1\sqrt{3} \checkmark$$

$$(G3): \forall (a_1 + b_1\sqrt{3}) \exists (a_2 + b_2\sqrt{3}) \text{ mit } (a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = 0$$

$$(a_2 + b_2\sqrt{3}) := \cancel{-(b_1 + b_1\sqrt{3})} \cancel{(-a_1)(-b_1)\sqrt{3}} \; (-a_1) + (-b_1)\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1 + b_1\sqrt{3} - a_1 - b_1\sqrt{3} = 0 \checkmark$$

$$(G4): (a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) \stackrel{!}{=} (a_2 + b_2\sqrt{3}) + (a_1 + b_1\sqrt{3})$$

$+_{\mathbb{R}}$ assoziativ, kommutativ, daher ist die Aussage richtig. $\square$

$$(R2): \cancel{x \cdot (y \cdot z)} \quad (a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot ((a_2 + b_2\sqrt{3}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{3}))$$
$$\stackrel{!}{=} ((a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3})) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{3})$$

$\cdot_{\mathbb{R}}$ ist assoziativ, daher ist die Aussage richtig. $\square$

(R3):

Bis HIER ↑

NICHT WERTEN! ok

4. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$.

z.z. M ist Körper.

Zeige: M ist Unterkörper des Körpers $\mathbb{R}$

Dazu zunächst: $(M, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ ist Unterring von $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$

(i) $0_{\mathbb{R}} \overset{!}{\in} M$; $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{3} \in M$ ☑ ✓

(ii) $(M, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$

Dazu:

- (i) $0_{\mathbb{R}}$ muss neutrales Element sein:

$$(a + b\sqrt{3}) + 0_{\mathbb{R}} \overset{0 = 0 \cdot 0\sqrt{3}}{=} ((a+0) + (b+0)\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} \checkmark$$ ✓

- (ii) $(a_1 + b_1\sqrt{3}), (a_2 + b_2\sqrt{3}) \in M \overset{!}{\Rightarrow} (a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) \in M$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = \quad +_{\mathbb{R}} \text{ assoziativ, kommutativ; } +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}} \text{ distributiv}$$

$$\underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \in M \checkmark$$ ✓

- (iii) $(a_1 + b_1\sqrt{3}) \in M \overset{!}{\Rightarrow} (a_2 + b_2\sqrt{3}) \in M$ mit $(a_2 + b_2\sqrt{3}) = -(a_1 + b_1\sqrt{3})$

$$-(a_1 + b_1\sqrt{3}) = (-a_1) + (-b_1)\sqrt{3}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + ((-a_1) + (-b_1)\sqrt{3}) = 0 ; \quad \underbrace{(-a_1)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(-b_1)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{3} \text{ offensichtlich } \in M.$$ ✓ ☑

(iii) $(a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot_{\mathbb{R}} (a_2 + b_2\sqrt{3}) \overset{!}{\in} M$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{3}) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2\sqrt{3} + a_2 b_1\sqrt{3} + b_1 \cdot b_2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \underbrace{(a_1 \cdot a_2 + 3 \cdot b_1 \cdot b_2)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \sqrt{3} \in M$$ ✓

Somit ist $(M, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ (kommutativer) Unterring von $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ ✓ □

Nun zz: M ist unitär : $1_M \cdot (a + b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3}) \cdot 1_M$

$1_M := 1_{\mathbb{R}} + 0\sqrt{3} = 1_{\mathbb{R}}$ $\quad 1_M \cdot (a + b\sqrt{3}) = 1_{\mathbb{R}} \cdot (a + b\sqrt{3}) = a + b\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3}) \cdot 1_{\mathbb{R}}$ ✓

$\Rightarrow$ $(M, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ ist unitärer Unterring von $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$.

Nun zz.: $M^\times = M \setminus \{0\} \iff \forall (a + b\sqrt{3}) \overset{\in M}{\exists} (a + b\sqrt{3})^{-1} \in M$ mit $(a + b\sqrt{3}) \cdot (a + b\sqrt{3})^{-1} = 1$.

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} \overset{!}{=} a' + b'\sqrt{3}$$

Es muss gelten: $(a + b\sqrt{3}) \cdot (a' + b'\sqrt{3}) = 1$; $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$

$$(a + b\sqrt{3}) \cdot (a' + b'\sqrt{3}) = a \cdot a' + ab' \cdot \sqrt{3} + a'b \cdot \sqrt{3} + 3bb' \overset{!}{=} 1$$

Kann nur gelten für $ab'\sqrt{3} + a'b\sqrt{3} = 0$, da Vielfaches von $\sqrt{3}$ irrational, alle anderen Summanden rational und 1 rational sind. ✓

Somit ergibt sich das Gleichungssystem:

$a \cdot a' + 3 \cdot b \cdot b' = 1$ Gl. (1)

$a \cdot b' + b \cdot a' = 0$ Gl. (2)

Gesucht sind a', b' in Abh. von a, b; mit ihnen ergibt sich dann das Inverse $a' + b'\sqrt{3}$.

$(2) \Leftrightarrow ab' = -a'b$

$\Leftrightarrow b' = -\frac{b}{a} \cdot a'$

$\Leftrightarrow a' = -\frac{a}{b} \cdot b' \rightarrow$ in Gl. (1)

$\Rightarrow a \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot b' + 3 \cdot b \cdot b' = 1$

$\Leftrightarrow b' \cdot \left(-\frac{a^2}{b} + 3 \cdot b\right) = 1$

$\Leftrightarrow b' = \dfrac{1}{-\frac{a^2}{b} + 3b}$

$= \dfrac{1}{\frac{-a^2+3b^2}{b}}$

Wieso ist Nenner ungleich Null? −1

$= \dfrac{b}{3b^2 - a^2} \in \mathbb{Q}$, da $a, b \in \mathbb{Q}$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper (✓)

$\Rightarrow a' = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{3b^2-a^2} = -\frac{a}{3b^2-a^2} \in \mathbb{Q}$, da $a, b \in \mathbb{Q}$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Körper (✓)

$\Rightarrow (a + b\sqrt{3})^{-1} = (a' + b'\sqrt{3}) = \left(-\frac{a}{3b^2-a^2} + \frac{b}{3b^2-a^2} \cdot \sqrt{3}\right) \in M$

$= \dfrac{b\sqrt{3} - a}{3b^2 - a^2} = ((-a) + (b)\sqrt{3}) \cdot \dfrac{1}{-a^2+3b^2} \in M$ ✓

$\square$

Somit ist M ein Körper! $\boxed{}$ ✓

5/6