Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2011/12

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. M. Witte

Blatt 3
Abgabetermin: Donnerstag, 03.11.2011, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Injektivität und Surjektivität von Abbildungen)*
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x-1}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$,

(c) $f_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$,

(d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (y, x + y)$.

Aufgabe 2. *(Verhalten von Injektivität und Surjektivität unter Komposition)*
Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen und sei $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 3. *(affine Transformationen)*
Man betrachte die Menge G aller Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $g(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Sind $g, h \in G$, so liegt auch die Komposition $h \circ g$ in G.

(b) Bezeichnet man mit $e \in G$ die Funktion $e(x) = x$, so ist $(G, \circ, e)$ eine Gruppe, aber nicht abelsch.

Aufgabe 4. *(Potenzen in Gruppen)*
Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe. Zu einem Element $g \in G$ und einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$g^n = \underbrace{g * g * \ldots * g}_{n\text{-mal}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Angenommen, G enthält nur endlich viele Elemente. Dann gibt es zu jedem $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $g^n = e$.

(b) Angenommen, es gilt $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Dann ist G abelsch.

Gruppe: (i) $H \neq \emptyset$

(ii) $\forall g, h \in H : g \circ h^{-1} \in H$

(dann $h^{-1} \in H$)

$\xi \quad T \approx$ Duy Thao

$$g' * g' = e$$

$$(g*h) * (g*h) = e$$

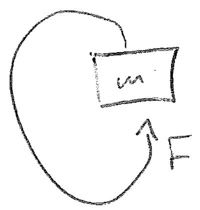
$\Uparrow$

G

$$(h*g) * (g*h) = h * \underbrace{(g*g)}_{e} * h$$

$$= h * e * h$$

$$= h * h = e$$



$$(g*h) \cancel{* (g*h)} = (h*g) \cancel{* (g*h)}$$

$$g*h = h*g$$

ok.

GUYS IN DISGUISE

J G P

Tutor Philip Schill   Lukas Beichert

Lineare Algebra I, Blatt 3   Jannis

02.11.11

1	2	3	4	Σ
5	4	2	5	16

Aufgabe 1

a)

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x-1}$$

• Injektivität: Z.z.: $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $m \neq n \Rightarrow \frac{1}{m-1} \neq \frac{1}{n-1}$

Seien $x, k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{k-1} \Leftrightarrow x-1 = k-1 \Leftrightarrow x = k \checkmark$$

Also: $f(x) = f(k)$ nur wenn $x = k$. Dann folgt aus $x \neq k$ $f(x) \neq f(k)$ □ ✓

• Surjektivität:

Nicht surjektiv. Gegenbeispiel:

Für $0 \in \mathbb{R}$ ist kein Urbild definiert.

$$\frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \cdot (x-1) \text{ ↯ } \checkmark$$

• Folglich ist f_1 nicht bijektiv. ✓ (surj. nicht gegeben)

b)

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$$

• nicht injektiv, Gegenbeispiel:

$f^{-1}(4) = 2 \vee (-2)$

-0,5 f^{-1} als Umkehrfktn. nicht definiert. Als Urbild ergibt sich eine Menge ($f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$)

• nicht surjektiv, Gegenbeispiel:

$f^{-1}(-1)$ ist nicht definiert. ✓ s.o.

• Folglich ist f_2 nicht bijektiv ✓ (inj., surj. nicht geg.)

c) $f_3: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (m,n) \longmapsto \frac{m}{n}$

- ~~injektiv~~ nicht injektiv, Gegenbeisp.:

$\cancel{f(1,2) = \frac{1}{2} = \frac{2}{2}}$

$f(2,4) = \frac{2}{4} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = f(1,2)$ ✓

- surjektivität gegeben, denn:

$\mathbb{Q} := \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$, also lässt sich jedes Element von $\mathbb{Q}$ durch $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ darstellen, was der Funktion f_3 entspricht. Formulierung

- also ist f_3 nicht bijektiv ✓ (injekt. nicht geg.)

d) $f_4: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \longmapsto (y, x+y)$

- injektivität gegeben denn:

$x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = f(x',y') \iff (y, x+y) = (y', x'+y')$

$\Rightarrow y = y'$ und $x+y = x'+y'$ ✓

~~$\Rightarrow$~~ da $y = y' \Rightarrow x+y = x'+y \Rightarrow x = x'$

damit ~~aus~~ $f(x,y) = f(x',y')$ ~~folgt~~ muss gelten $x = x', y = y'$.
Deshalb folgt aus $x \neq x'$ und/oder $y \neq y'$ immer
$f(x,y) \neq f(x',y')$ $\square$ ✓

12

• Surjektiv: zz: $\forall z,a \in \mathbb{R}\ \exists x,y \in \mathbb{R}$ mit $(y, x+y) = (z,a)$

$(y, x+y) = (z,a) \quad \forall\ z, a, x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = z, \quad x+y = a \Rightarrow \quad x = a-y = a-z$

$\Rightarrow (y, x+y) = (z, a-z+z) = (z,a)$ -0,5

folglich ist f_4 surjektiv (denn $f_4(a-z, z) = (z,a)$)

• Da f_4 sowohl surjektiv als auch injektiv $\Rightarrow f_4$ ist bijektiv. ✓ 5/6

gut ∵

Auf. 2 $\quad m, m', n, n' \in X \quad m \neq m', \ n \neq n'$

a) Zz: $f(m) \neq f(m'), \ g(n) \neq g(n') \Rightarrow g(f(m)) \neq g(f(m'))$

-0,5 zz: $m \neq m' \Rightarrow g(f(m)) \neq g(f(m'))$

$m \neq m' \Rightarrow f(m) \neq f(m') \Rightarrow g(f(m)) \neq g(f(m'))$ □ (✓)

---

b) $\circ\ f: X \to Y \ ; \quad g: Y \to Z$

Zz: $f(x) = Y, \quad g(Y) = Z \quad \Rightarrow \quad g(f(Y)) = Z$

X Y

$\therefore g(f(x)) = g(Y) = Z$ ✓ □

---

c) $f: X \to Y \ ; \ g: Y \to Z \ ; \ g \circ f: X \to Z$

Zz. $m, m' \in X, \ m \neq m', \ (g(f(m)) \neq g(f(m'))) \Rightarrow f(m) \neq f(m')$

Annahme: $f(m) = f(m') =: z$

$\Rightarrow \quad g(f(m)) = g(f(m')) \Leftrightarrow g(z) \neq g(z)$ ↯ unmöglich

-1 „aber $g(f(m)) \neq g(f(m'))$ da $g \circ f$ inj." wieso $\neq$?

also muss $f(m) \neq f(m')$ und damit f injektiv sein.

~~d) Zz: $g(f(x)) = Z \Rightarrow g(Y) = Z$~~

d) $f: X \to Y \quad g: Y \to Z \quad g \circ f: X \to$

Zz $g(f(X)) = Z \Rightarrow g(Y) = Z$

geg: $f(X) \subset Y$; $f(x) \neq \emptyset$

-0,5 $\quad g(f(x)) = Z \Rightarrow f(x) \overset{\subset}{=} g^{-1}(Z)$

da $f(x) \neq \emptyset$ gilt $g^{-1}(Z) \neq \emptyset \Rightarrow g(Y)$ ist surjektiv. ✓

4/6

Auf. 3

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$

$g, h \in G$

Zz.: $g, h \in G \Rightarrow (h \circ g) \in G$

Seien $a, b, c, d, r, s, t \in \mathbb{R}$; $a, c \neq 0$

und $g(x) = ax + b \in G$; $h(x) = cx + d \in G$

$\Rightarrow g(h(x)) = a(cx + d) + b = acx + da + b$

$= (ac) \cdot x + (ad + b)$

$r := a \cdot c$; $s := ad$; $t := s + b$

$\Rightarrow g(h(x)) = rx + t$; $r, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(h(x)) \in G$ //

$r \neq 0$, da $a, c \neq 0$ -1

b) Zz: $e \in G$, $e(x) = x \Rightarrow (G, \circ, e)$ ist Gruppe aber nicht abelsch

G1: Assoziativität: $\quad g, h, k \in G$

$(g \circ h) \circ k = (g(h)) \circ k = g(h(k))$ $\quad$ g(h) schreibt man nicht für Funktionen. $\quad -0,5$

$g \circ (h \circ k) = g \circ (h(k)) = g(h(k))$ $\quad$ Setze ein bel. Element aus dem Def.-Bereich ein:

zB: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $((g \circ h) \circ k)(x) = (g \circ h)(k(x)) = g(h(k(x)))$

$\Rightarrow (g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$. ✓ Assoziativ. geg.

Σ 4

G2: Linksneutrales Element $e(x) = x$

e(x) ist reelle Zahl, dafür ist „$\circ$" nicht def. −1

$e \circ g = e(x) \circ g = e(g) = g$ □ (✓) Es exist. ein linksneutrales Element ✓

s.o.

G3: Linksinverses Element:

so nicht! Du behandelst hier h wie eine reelle Zahl. −1

$g \circ h \overset{!}{=} e \Rightarrow (ax + b) \circ h = e \Rightarrow a \cdot h + b = e$

$\Rightarrow h = \frac{e}{a} - \frac{b}{a}$ Es ex. ein Linksinverses Element.

Hier hast du h als rechtsinverses Element gezeigt. (zzwar stattdessen $h \circ g = e$) −0,5

G4: abelsch

Gegenbeispiel: ~~$f(x) = x^2$ $g(x) = 2x$~~ $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 1$

$f \circ g = g \circ f \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x))$

$\Rightarrow (2x+1) + 1 = 2(x+1) + 1$

$\Rightarrow 2x + 2 = 2x + 3$ ↯ Die Gruppe ist nicht abelsch. ✓

2/6

Auf. 4

a) $g * e = g \Rightarrow e = 1$?

Zz. für endliche G: Ex zu jedem $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ sodass gilt: $g^n = e$

Bew: Da G endlich: Ex $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, für die gilt:

$x^i = x^j$ (da ansonsten $\forall\, i,j$ $x^i \neq x^j \Rightarrow \# G = \infty$) ✓

Sei $j < i$, $n := i - j$.

Schreibe nicht $\frac{1}{x}$ sondern x^{-1} in Gruppen!

$\hat{=} (x^j)^{-1} = (x^{-1})^j$

$x^i = x^j \Rightarrow x^i \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^j = 1$

$x^i \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^j = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{i \text{ mal}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{j \text{ mal}}$ −1

Begr. wieso Reihenfolge egal?

$1 = x^i \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^j = \underbrace{\underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}}_{j \text{ mal}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{i-j \text{ mal}} = 1^j \cdot x^{i-j} = 1 \cdot x^n$

$\Rightarrow x^n = 1 = e$ □ ok

5

b) $g^2 = g * g = e \quad \forall g \in G$

Zz. $g * h = h * g$

Im Allg. ist $(g*h)^2 \neq g^2 * h^2$.

$$(g*h)*(g*h) = (g*h)^2 = g^2 * h^2 = e \cdot e = e$$

$$(h*g)*(g*h) = h*(g*g)*h = h*g^2*h = h*\underbrace{e*h}_{h} = h^2 = e$$

$$\Rightarrow (g*h)*(g*h) = (h*g)*(g*h) \quad \square$$

$\Rightarrow (g*h) = (h*g)$

G ist abelsch

5/6

6