Lukas BEICHERT,
Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Philip SCHILL
Do 16

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2011/12

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. M. Witte

Blatt 12
Abgabetermin: Donnerstag, 19.01.2012, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Explizite Berechnung einer Determinante)*
Bestimmen Sie (unter Angabe der Rechenschritte) die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & -2 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -20 & -2 & 12 & 0 \\ 4 & 37 & 4 & 19 & 28 \\ 3 & 8 & 0 & 21 & -18 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(Determinanten antisymmetrischer Matrizen)*

(a) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Benutzen Sie die Homogenität der Determinante, um zu zeigen: Es gilt $|-A| = (-1)^n|A|$.

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ mit $A^t = -A$, so ist A nicht invertierbar. Gibt es eine invertierbare reelle 2×2-Matrix A mit $A^t = -A$?

Aufgabe 3. *(Permutationsmatrix)*
Stellen Sie jede der folgenden Permutationen $\sigma \in S_5$ als Produkt von Transpositionen dar, berechnen Sie das Signum $\mathrm{sgn}(\sigma)$ und bestimmen Sie die zugehörige Permutationsmatrix $\varphi(\sigma) \in \mathrm{Gl}_5(\mathbb{R})$.

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4 2 3 1 5

Aufgabe 4. *(Homomorphismen auf dem Polynomring)*
Sei K ein Körper. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathrm{Pol}_n(K)$ den Untervektorraum von $K[x]$ der Polynome vom Grad $\leq n$, d.h.

$$\mathrm{Pol}_n(K) = \{a_0 + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in K\}.$$

(a) Zeigen Sie: Die beiden Abbildungen

$$h_1 : \mathrm{Pol}_2(K) \to \mathrm{Pol}_3(K),\ f \mapsto (1-x)\cdot f, \quad \text{und} \quad h_2 : \mathrm{Pol}_3(K) \to \mathrm{Pol}_2(K),\ g \mapsto g',$$

sind Homomorphismen. Für ein beliebiges Polynom $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ bezeichne hierbei g' die formale Ableitung $g' = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2$.

(b) Seien h_1, h_2 wie in (a). Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung $h = h_2 \circ h_1 : \mathrm{Pol}_2(K) \to \mathrm{Pol}_2(K)$ bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von $\mathrm{Pol}_2(K)$. Ist h ein Isomorphismus?

1	2	3	4	Σ
6	6	6	5	23

1. $\begin{vmatrix} 1 & 12 & -2 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -20 & -2 & 12 & 0 \\ 4 & 37 & 4 & 19 & 28 \\ 3 & 8 & 0 & 21 & -18 \end{vmatrix}$ (Entwicklung nach der 2. Zeile)

$= (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & -6 \\ 2 & -2 & 12 & 0 \\ 4 & 4 & 19 & 28 \\ 3 & 0 & 21 & -18 \end{vmatrix}$

Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten (erlaubt wg. Alternierendheit und $\det A^T = \det A$)

$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & -6 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 19 & 28 \\ 3 & 0 & 21 & -18 \end{vmatrix}$

Addition von 2x der 1. Zeile zu der 3.

$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & -6 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 33 & 16 \\ 3 & 0 & 21 & -18 \end{vmatrix}$

Entwicklung nach 2. Spalte

$= 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 6 & 33 & 16 \\ 3 & 21 & -18 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 6 & 33 \\ 3 & 21 \end{matrix}$

$= 10 \cdot \big((1 \cdot 33 \cdot (-18)) + (5 \cdot 16 \cdot 3) + (6 \cdot 6 \cdot 21) - (3 \cdot 33 \cdot 6) - (21 \cdot 16 \cdot 1) - ((-18) \cdot 6 \cdot 5) \big)$

$= 10 \cdot (-594 + 240 + 756 - 594 - 336 + 540)$

$= 10 \cdot 12 = 120$

6/6

2. (a) Es gilt: $\det(a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

Anwendung dieser Identität für $\det(-a_1, \ldots, -a_n)$ (Minus vor allen Spaltenvektoren)

ergibt $\det(-A) = \det(-a_1, \ldots, -a_n)$

$= (-1) \det(a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

$= (-1)^n \det(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (kein Minus mehr vor Spalten)

$= (-1)^n \det(A)$ □

(b) $A^t = -A \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$

$a_{12} = -a_{21}$

$a_{13} = -a_{31}$

$a_{23} = -a_{32}$

Z.z.: $\det(A) = 0$ Entwickle $\det(A)$ nach 1. Zeile:

$|A| = (-1)^3 \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{23} \\ -a_{13} & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} -a_{12} & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} \end{vmatrix}$

$|A| = -a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{12} \cdot a_{23} = 0$ ✓

Für 2x2-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a = d = 0$; $b = -c$

$\Rightarrow \det(A) = ad - bc = b^2 \neq 0$ für $b \neq 0$ ✓

$\Rightarrow$ Es gibt 2x2-Matrizen, die $A^t = -A$ erfüllen und dennoch invertierbar sind, nämlich alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \neq 0$ -0,5

6/6

3. (a) $\sigma_a = (1\,4) \circ (2\,3)$; $\operatorname{sgn}(\sigma_a) = (-1)^2 = 1$ ✓

$\varphi(\sigma_a) = (\hat{e}_{\sigma_a(1)}, \hat{e}_{\sigma_a(2)}, \hat{e}_{\sigma_a(3)}, \hat{e}_{\sigma_a(4)}, \hat{e}_{\sigma_a(5)})$ ✓ mit $\hat{e}_i$ i-te kanon. Einheitsvektoren

$$\Rightarrow \varphi(\sigma_a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

(b) $\sigma_b = (3\,5) \circ (4\,2) \circ (1\,4)$ ✓; $\operatorname{sgn}(\sigma_b) = (-1)^3 = -1$ ✓

$$\varphi(\sigma_b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

6/6

4. (a) zz: Linearität.

Polynomring abelsch, da K Körper

$h_1(\lambda \cdot f) = (1-x) \cdot \lambda \cdot f = \lambda \cdot (1-x) \cdot f = \lambda\, h_1(f)$ ✓

Polynomring über Körper $\Rightarrow$ Distributivgesetz

$h_1(f+g) = (1-x) \cdot (f+g) = (1-x) f + (1-x) g = h_1(f) + h_1(g)$ ✓

$h_2(\lambda \cdot f) = h_2(\lambda \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)) = h_2(\lambda b_0 + \lambda b_1 x + \lambda b_2 x^2 + \lambda b_3 x^3)$

$= \lambda b_1 + 2\lambda b_2 x + 3\lambda b_3 x^2 = \lambda (b_1 + 2 b_2 x + 3 b_3 x^2) = \lambda\, h_2(f)$ ✓

$h_2(f+g) = h_2((b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3))$

[mit $f = \sum_{i=0}^{3} b_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i$]

$= h_2((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1) x + (b_2 + c_2) x^2 + (b_3 + c_3) x^3)$ ✓

$= (b_1 + c_1) + 2 \cdot (b_2 + c_2) \cdot x + 3 \cdot (b_3 + c_3) \cdot x^2$

$= (b_1 + 2 b_2 x + 3 b_3 x^2) + (c_1 + 2 c_2 + 3 c_3 x^2) = h_2(f) + h_2(g)$ ✓ $\square$

(b)

Gesucht: $M^{(1,x,x^2)}_{(1,x,x^2)}(h_2 \circ h_1)$

Allgemeines Pol. $f := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \hat{=} (b_0, b_1, b_2)$ bzgl. $(1, x, x^2)$

$h_1(f) = b_0 + (b_1 - b_0)x + (b_2 - b_1)x^2 - b_2 x^3$

$h_2(h_1(f)) = (b_1 - b_0) + (2b_2 - 2b_1)x - 3b_2 x^2$

$\hat{=} (b_1 - b_0, 2b_2 - 2b_1, -3b_2)$ bzgl. $(1, x, x^2)$

$\Rightarrow \quad M \cdot (b_0, b_1, b_2)^t = (b_1 - b_0, 2b_2 - 2b_1, -3b_2)^t$ ✓

M ist allgemein der Form $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow \quad a_{11} b_0 + a_{12} b_1 + a_{13} b_2 = b_1 - b_0 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = -1, \; a_{12} = 1, \; a_{13} = 0$

$a_{21} b_0 + a_{22} b_1 + a_{23} b_2 = 2b_2 - 2b_1 \quad \Rightarrow \quad a_{21} = 0, \; a_{22} = -2, \; a_{23} = 2$

$a_{31} b_0 + a_{32} b_1 + a_{33} b_2 = -3b_2 \quad \Rightarrow \quad a_{31} = 0, \; a_{32} = 0, \; a_{33} = -3$

$\Rightarrow \quad M^{(1,x,x^2)}_{(1,x,x^2)}(h_2 \circ h_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ✓

nur wenn $\mathrm{Char}(K) \notin \{2, 3\}$ $\quad -1$

$\det(M) \overset{\text{obere Dreiecksmatrix}}{=} (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = -6 \neq 0$

$\Rightarrow (h_2 \circ h_1) : Pol_2(K) \to Pol_2(K)$

ist ein Isomorphismus, da die Determinante seiner darstellenden Matrix nicht null ist. (✓)

5/6