Blatt 11 — Schnitzer, Berchert — 11.01.12

1	2	3	4	Σ
6	/	6	3	15

Auf 1 Wir sind in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ a^2-a & 1 & 4 & a^2+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2a^2+2a & 0 & -5=0 & -2a^2+2 \end{array}\right) ✓$$

$\Leftrightarrow$ • $\bar{4}x_1 + \bar{4}x_2 = \bar{2} \Rightarrow \bar{4}x_2 = \bar{2} - \bar{4}x_1$ $\quad | \; \bar{4}^{-1} = \bar{4}$

$\Rightarrow x_2 = (\bar{2} - \bar{4}x_1) \cdot \bar{4}^{-1}$

$\underline{\underline{x_2}} = \bar{8} - x_1 = \underline{\underline{\bar{3} - x_1}}$ ✓

• $\bar{2}x_2 + \bar{3}x_3 = \bar{4} \Rightarrow x_3 = (\bar{4} - \bar{2}x_2) \cdot \bar{3}^{-1}$ $\quad | \; \bar{3}^{-1} = \bar{2}$

$x_3 = \bar{8} - \bar{4}x_2$

$= \bar{3} - \bar{4}(\bar{3} - x_1)$

$= \bar{3} - \overline{12} + \bar{4}x_1$ ✓

$\underline{\underline{x_3 = \bar{1} + \bar{4}x_1}}$

• $x_1(-2a^2 + 2a) = -2a^2 + 2$

$\bar{a} = \bar{0}$: $\quad 0 = 2$ ↯ $\Rightarrow$ Für $\bar{a} = \bar{0}$ hat das LGS keine Lösung. ✓

$\bar{a} = \bar{1}$: $\quad x_1(\bar{0}) = \bar{0} \Rightarrow$ unbestimmte Variable $\Leftrightarrow$ mehr als eine Lösung

Sei $x_1 = t$. $\quad \Rightarrow L = \{(t, \bar{3} - t, \bar{1} + \bar{4}t)\}$ ✓

$\bar{a} = \bar{2}$: $\quad x_1 \cdot \bar{1} = \bar{4}$

Lösung: $\bar{x} = (\bar{4}, \bar{4}, \bar{2})$ ✓

$\bar{a} = \bar{3}$: $\quad x_1 \cdot \bar{3} = \bar{4}$

$x_1 = \bar{4} \cdot \bar{3}^{-1} = \bar{8} = \bar{3}$

$\Rightarrow \bar{x} = (\bar{3}, \bar{0}, \bar{3})$ ✓

$\bar{a} = \bar{4}$: $\quad x_1 \cdot \bar{1} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = (\bar{0}, \bar{3}, \bar{1})$ ✓ $\quad$ 6/6.

Schnitzer, Beichert 11.01.12

Auf 3

Euklidischer Algorithmus:

$f = q_1 \cdot g + f_3$

"$\left(\frac{f}{g}\right)$": $(x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2) : (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2)$

$= 1$ Rest: $x^3 - 2x$ ✓

$\Rightarrow f = \overset{q_1}{1} \cdot g + \overbrace{(x^3 - 2x)}^{f_3}$

$g = q_2 \cdot f_3 + f_4$

g/f_3: $(x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2) : (x^3 - 2x) = x + 1$ Rest: $x^2 - 2$ ✓

$\Rightarrow g = \overbrace{(x+1)}^{q_2} \cdot f_3 + \underbrace{x^2 - 2}_{f_4}$

$f_3 = q_3 \cdot f_4 + f_5$

f_3/f_4: $(x^3 - 2x) : (x^2 - 2) = x$ Rest: 0 ✓

$\Rightarrow f_3 = x \cdot f_4 + 0$

Nach Satz 5.10 folgt: der ggT von f u. g ist

$d = f_4 = x^2 - 2$ ✓

~~$\left(f/f_4 : (x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2) : (x^2 - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \right.$~~

~~$\left. g/f_4 \quad (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2) : (x^2 - 2) = x^2 + x + 1 \right)$~~

~~$\Rightarrow d =$~~

- $f = q_1 \cdot g + f_3 \Rightarrow f_3 = f - q_1 \cdot g$

- $g = q_2 \cdot f_3 + d \Rightarrow d = g - q_2 \cdot f_3 = g - q_2 f + q_1 q_2 g$

$= -q_2 f + (1 + q_1 q_2) \cdot g$

$\Rightarrow d = -(x+1) \cdot f + (1 + 1 \cdot (x+1)) \cdot g = (x+2) g - (x+1) \cdot f$ ✓ 6/6

Auf 4) Geg.: K-VR V mit Basis $v_1, \dots, v_n$

Alternierende 2-Form $\alpha: V \times V \to K$

mit $\alpha(v_i, v_j) \overset{!}{\longmapsto} a_{ij}$ für $i<j$

da α alternierend außerdem: $\alpha(v_i, v_j) \overset{!}{\longmapsto} -a_{ij}$ für $i>j$

[Entweder $(v_i, v_j) \mapsto a_{ij}$ oder $\alpha(v_i, v_j) = a_{ij}$] $\alpha(v_i, v_j) \overset{!}{\longmapsto} 0$ für $i=j$

$\Rightarrow$ α ist für die Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ eindeutig bestimmt.

Jeder Vektor $\beta \in V$ kann als Lin.komb. von $v_1, \dots, v_n$ darg. werden:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\to \alpha(\beta_1, \beta_2) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right)$$

(da α multilinear) $$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \alpha(\lambda_i v_i, k_j v_j)$$

$$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \lambda_i k_j \alpha(v_i, v_j)$$

$\Rightarrow$ α ist auch für beliebige Vektoren eindeutig bestimmt. ok //

Damit ist zwar Eindeutigkeit, aber nicht die Existenz gezeigt. −2

Die Elemente α_e aus $Alt^2 V$ unterscheiden sich nur durch ihre Skalarsätze $(a_e)_{ij}$ } Begr.? −1

Um jede mögliche Matrix $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & a_{n-1\,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

bilden zu können, benötigt man für jedes Feld a_{ij} ein "eigenes" α_e mit $(a_e)_{ij}$. d.h.?

Es gibt $n \cdot (n-1)$ Felder mit "echt verschiedenen" Indizes, folglich $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Felder mit $i<j$.

$\Rightarrow$ Die Basis von $Alt^2 V$ hat $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ verschiedene Elemente ✓ $\Rightarrow \dim Alt^2 V = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ //

3/6