Lukas BEICHERT, Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Philip SCHILL, Do 16

1	2	3	4	Σ
5	6	6	6	23

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2011/12

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. M. Witte

Blatt 10
Abgabetermin: Donnerstag, 22.12.2011, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(Darstellungsmatrix)*
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3}(f)$ von f bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3) des $\mathbb{R}^3$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. *(Basisergänzung)*
Gegeben seien das System linear unabhängiger Vektoren (v_1, v_2, v_3) mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und das Erzeugendensystem $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

in $V = \mathbb{Q}^5$. Bestimmen Sie j_1 und j_2, so dass $(v_1, v_2, v_3, w_{j_1}, w_{j_2})$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 3. *(Lineares Komplement)*
Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 18 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in $V = \mathbb{Q}^5$. Bestimmen Sie eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und eine Basis eines linearen Komplements U' von U in V.

Aufgabe 4. *(Berechnung der dualen Basis)*
Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

in $V = \mathbb{Q}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass das System (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V bildet.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der dualen Basis (v_1^*, v_2^*, v_3^*) bezüglich der Standardbasis (e_1^*, e_2^*, e_3^*) von V^*.

$1-8$

$-\frac{5}{4} \cdot -\frac{4}{5} = 1$ $\qquad \frac{11}{2} \cdot \frac{16}{21} = \frac{88}{21}$

$-\frac{1}{4} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ $\qquad 2 \cdot \frac{4}{5} = 8/5$ $\qquad \frac{11 \cdot 13}{2 \cdot 21}$ $\qquad \frac{143}{42}$

Lineare Algebra I, Blatt 10

Aufgabe 1.

Nach Basisdarstellungswechselsatz ist

$$M^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3}(f) = \underbrace{T^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}} \cdot M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) \cdot \underbrace{T^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3}}$$ WA

wobei $T^{a}_{b} := M^{a}_{b}(id)$; T^{e_1,e_2,e_3}

-0,5 $T^{v_1 v_2 v_3}_{e_1 e_2 e_3}$

$T := T^{v_1,v_2,v_3}_{e_1,e_2,e_3}$; $T^{e_1,e_2,e_3}_{v_1,v_2,v_3} = T^{-1}$

$$T^{-1} = \left(v_1, v_2, v_3 \right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{lustigerweise}}{\overset{!}{=}} M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)$$

s.o.

$$\Rightarrow M^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3}(f) = \underline{T} \cdot M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) \cdot \underline{T^{-1}}$$

Matrizenmultiplikation ist im Allg. nicht kommutativ

-0,5

$$= T \cdot T^{-1} \cdot M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)$$

$$= M^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) \quad (\checkmark) \quad \square$$

5/6

Aufgabe 2. Wende Methode aus Satz 4.4 an: Setze A als die Matrix, deren Zeilen die Vektoren $v_1, \ldots, v_3, w_{j(1)}, \ldots, w_{j(5)}$ sind (mit $j = id$), bringe diese auf strenge Zeilenstufenform (unter Beachtung, welche Spalte Zeile von welchem Vektor kommt), betrachte die ersten n Zeilen (mit $n = \dim(V)$); die Indices $j(4), \ldots, j(n-3)$ der Vektoren aus dem Erzeugendensystem, die die ~~Basis~~ $v_1, \ldots, v_3$ zu einer Basis des V ergänzen, sind dann die Zeilen derjenigen Zeilen der Str. ZSF gehörende, die nicht von einem der $v_1, \ldots, v_3$ kommen.

In der Tat:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array}$$

Schreibe bitte dazu, welche Zeilenumformungen gemacht werden.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 3/2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1/4 & -1/2 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 5/4 & 2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5/4 & -2 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -5/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/4 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 5/4 & 2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5/4 & -2 & -5/4 \\ 0 & -1/4 & -5/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_5 \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_5 \end{array} \to$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&3/4&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&8/5&0\\0&0&1&1/5&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}v_1\\w_2\\v_2\\w_5\\v_3\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&3/4&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-7&0&0\\0&0&1&1/5&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}v_1\\w_2\\v_2\\w_5\\v_3\end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}v_1\\w_2\\v_2\\w_5\\v_3\end{array}$$

$\Rightarrow$ w_2 und w_5 können zur Basisergänzung genutzt werden. ✓ 6/6

Aufgabe 3.

Basis von U: $\to$ Strenge ZSF der Matrix, deren Zeilen die $v_1, \ldots, v_4$ sind.

$$\begin{pmatrix}4&2&3&3&1\\-3&-1&4&1&2\\1&3&11&1&1\\2&4&18&5&4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1/2&3/4&3/4&1/4\\1&1/3&-4/3&-1/3&-2/3\\1&3&11&1&1\\1&2&9&5/2&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1/2&3/4&3/4&1/4\\0&-1/6&-\frac{25}{12}&-\frac{13}{12}&-\frac{11}{12}\\0&1&2&-3/2&-1\\0&3/2&33/4&7/4&7/4\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&1/2&3/4&3/4&1/4\\0&1&25/2&13/2&11/2\\0&1&2&-3/2&-1\\0&1&11/2&7/6&7/6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1/2&3/4&3/4&1/4\\0&0&7&16/3&13/3\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{-7/2}&\cancel{-8/3}&\cancel{-13/6}\\0&1&11/2&7/6&7/6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1/2&3/4&3/4&1/4\\0&1&11/2&7/6&7/6\\0&0&1&16/21&13/21\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-2&1/6&-1/3\\0&1&0&-\frac{127}{42}&-\frac{47}{21}\\0&0&1&\frac{16}{21}&\frac{13}{21}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&\frac{71}{42}&\frac{19}{21}\\0&1&0&-\frac{127}{42}&-\frac{47}{21}\\0&0&1&\frac{16}{21}&\frac{13}{21}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\71/42\\19/21\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-\frac{127}{42}\\-\frac{47}{21}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\frac{16}{21}\\\frac{13}{21}\end{pmatrix}\right)$$ ist Basis von U. ✓

Die Spaltenindizes 4 und 5 sind offenbar keine Stufenindizes mehr. Damit sind die kanonischen Einheitsvektoren

$\hat{e}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\hat{e}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ eine Basis von $U' = \mathrm{Lin}(\hat{e}_4, \hat{e}_5)$. (Alles nach 4.4)

6/6

Aufgabe 4. a) Zz: $(v_1, \ldots, v_3)$ ist l. u.

Assoziierte Matrix A:

$$A := \begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&3\\3&4&11\end{pmatrix}$$

$v_1, \ldots, v_3$ ist l. u., wenn $A \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t = 0$, ~~d.h. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ wird~~ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar ~~nur gilt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.~~

$\Leftrightarrow$ Die str. ZSF von A ist die 3x3-Einheitsmatrix

~~Gauss:~~ $$\cancel{\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&3\\3&4&11\end{pmatrix}\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\end{array} \to \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1/2&3/2\\1&4/3&11/3\end{pmatrix}\begin{array}{c}-(1)\\-(1)\end{array} \to \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-3/2&1/2\\0&7/3&8/3\end{pmatrix}\begin{array}{c}-\frac{2}{3}\\\frac{3}{7}\end{array} \to \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1/3\\0&1&8/7\end{pmatrix}-(\mathrm{II}) \to \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1/3\\0&0&\frac{31}{21}\end{pmatrix}\frac{21}{31} \xrightarrow{+(\mathrm{II}')-(\mathrm{III}')} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} ✓ \square$$

~~b) Führe die obigen Operationen auf Einheitsmatrix aus, um A^{-1} zu erhalten~~

Zugleich ermitteln wir A^{-1}, das wir in (b) brauchen.

$$\cancel{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1/2&0\\-1&0&1/2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\3/2&-3/4&0\\-3/7&0&3/14\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\3/2&-3/4&0\\\frac{27}{14}&3/4&3/14\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\3/2&-3/4&0\\-\frac{81}{62}&&\end{pmatrix}}$$

Aktionen auf E_3 ausgeführt:

Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 4/3 & 11/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 7/3 & 8/3 & -1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -10 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -23 & 15 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

Offenbar ~~Kolonnen~~ ist die str. ZSF die Einheitsmatrix, $v_1, -, v_3$ ist also l.u. und damit wg $\dim(\mathbb{Q}^3) = 3$ eine Basis. ✓

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -23 & 15 & -2 \\ -13 & 8 & -1 \\ 11 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

Nach VL 4.4 ~~sind~~ sind die Koordinaten der dualen Basis (v_1^*, v_2^*, v_3^*) durch die Zeilen von A^{-1} gegeben, also ~~~~ gilt:

$$v_1 = \alpha_1 e_1^* + \beta_1 e_2^* + \gamma_1 e_3^*$$
$$v_2 = \alpha_2 e_1^* + \beta_2 e_2^* + \gamma_2 e_3^*$$
$$v_3 = \alpha_3 e_1^* + \beta_3 e_2^* + \gamma_3 e_3^*$$

und
$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (-23, 15, -2)$$ ✓
$$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (-13, 8, -1)$$
$$(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = (11, -7, 1)$$ $\square$

6P