| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 3 | ~~6~~ 5 | ~~20~~ 19 |

Jannis Andrija SCHNITZER
Matrikel 2334023
Tutor: Philipp Schill
Di, 16:00

# Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2011/12

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. M. Witte

Blatt 01
Abgabetermin: Donnerstag, 20.10.2011, 9.15 Uhr

---

**Aufgabe 1.** *(Orthogonalität von Vektoren)*
Es seien $x, y$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \|x+y\| = \|x-y\|.$$

Wie lässt sich dies als elementargeometrische Aussage über das von $x$ und $y$ aufgespannte Parallelogramm deuten?

**Aufgabe 2.** *(Vektorprodukt)*
Gibt es einen Vektor $x$ im $\mathbb{R}^3$, für den $x \times y = z$ gilt? Falls ja, ermitteln Sie einen; falls nein, begründen Sie, warum keiner existiert.

(a) $y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},$ (b) $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

**Aufgabe 3.** *(Linksdrehung um 90° im $\mathbb{R}^2$)*
Für einen Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ setzen wir $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $x \perp x^\perp$, $\|x^\perp\| = \|x\|$ und $(x^\perp)^\perp = -x$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}^2$:

$$y \perp x \quad \Leftrightarrow \quad y = \beta x^\perp \text{ für ein } \beta \in \mathbb{R}.$$

(c) Sei weiterhin $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$. Dann lässt sich jedes $y \in \mathbb{R}^2$ schreiben als

$$y = \alpha x + \beta x^\perp \quad \text{mit } \alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\|x\|^2} \text{ und } \beta = \frac{\langle y, x^\perp\rangle}{\|x\|^2}.$$

**Aufgabe 4.** *(Beweis durch Widerspruch)*
Seien $a$ eine irrationale und $b$ eine rationale Zahl. Zeigen Sie:

(a) $a + b$ ist irrational.

(b) $a \cdot b$ ist irrational, falls $b \neq 0$.

(c) Man betrachte die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung $y = ax + b$ gegeben ist. Dann gibt es nur einen Punkt auf der Geraden, der rationale Koordinaten hat, nämlich $(0, b)$.

Lineare Algebra I, Blatt 01 Jannis Andrija Schnitzer

1. $x \perp y \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad (*)$

$$\|x+y\| \overset{!}{=} \|x-y\| \qquad L := \|x+y\| \ ; \ R := \|x-y\|$$

Abb. 0: Ein Kreis

super! :)

$$L = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2} \ \Big| \ R = \sqrt{\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2}$$

Aus $(*)$ folgt:

$$L = \sqrt{\|x^2\| + \|y\|^2} \ \Big| \ R = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \Rightarrow L = R \ \square$$

Nur eine Richtung der Äquivalenz gezeigt: $x \perp y \Rightarrow \|x+y\| = \|x-y\|$ −1

Das aufgespannte Parallelogramm (es handelt sich dabei um ein Rechteck) hat die Eigenschaft, dass beide Diagonalen ~~dieselbe~~ denselben Längenbetrag besitzen. ok.

5/6

2. a) Ang.? : $y = (5, 0, -2)$; $z = (2, -1, 5)$

$$x \times y = z$$

$$\Rightarrow x \times (5, 0, -2) \overset{!}{=} (2, -1, 5)$$

$$(-2x_1 ; 5x_3 + 2x_1 ; -5x_2) = (2; -1; 5)$$

Rechnung bzw. Gleichungssystem dazuschreiben!

$$x = \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}t; -1; t\right) = \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}t; -1; t\right)$$

$$x_0 = \left(-1; -1; \tfrac{1}{5}\right)$$

b) Ang.: $y = (2; 1; -2)$; $z = (1; 2; 0)$

$$x \times y = z$$

$$\Rightarrow (-2x_2 - x_3; 2x_3 + 2x_1; x_1 - 2x_2) = (1; 2; 0)$$

falsche Aussage, führt zu $x_1 + x_3 = -1 \wedge x_1 + x_3 = 1$

Es gibt keinen Vektor $x$, der die Bedingung erfüllt. Dies ist der Fall, da $z \perp y$ gelten muss, damit die Bedingung überhaupt erfüllt werden kann — was sich aus der Eigenschaft des Kreuzproduktes, einen Vektor zu ergeben, der senkrecht auf den Argumentvektoren steht, ergibt — aber mit den gegebenen Vektoren nicht gilt, da $\langle y, z \rangle \neq 0$ und damit $y \not\perp z$ ist. gut

6/6

3. Ang.? : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

a) Beh.: $x \perp x^\perp \Leftrightarrow \langle x, x^\perp \rangle = 0$

$$\langle x, x^\perp \rangle = x_1 \cdot (-x_2) + x_2 \cdot x_1 = 0 \ \square$$

Beh.: $\|x^\perp\| = \|x\|$

$$L := \|x^\perp\|^2 \ \Big| \ R := \|x\|^2$$

Äquivalenzpfeile fehlen −1

$\Leftrightarrow \quad L = \|x\|^2 \overset{?}{=} \|x^\perp\|^2$

$\Leftrightarrow \quad L = \langle x, x \rangle \quad R = \langle x^\perp, x^\perp \rangle$

$\Leftrightarrow \quad L = x_1^2 + x_2^2 \overset{?}{=} (-x_2)^2 + (x_1)^2$

$\Leftrightarrow \quad R = x_2^2 + x_1^2 = L \quad \Rightarrow \quad \sqrt{R} = \sqrt{L}$

$\|x\| = \|x^\perp\| \quad \square$

nur da $\|x\| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ → dazuschreiben! −1

Beh.: $(x^\perp)^\perp = -x$

Sei $y = x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = -x_2 \\ y_2 = x_1 \end{matrix}$

$y^\perp = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = -x = (x^\perp)^\perp \quad \square$ ✓

b) Geg.: $x \in \mathbb{R}^2$ ; $x \neq 0$
$y \in \mathbb{R}^2$

$y \perp x \Leftrightarrow \langle y, x \rangle = 0 \quad (*)$

Beh.: $y \overset{!}{=} \beta x^\perp$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta x_2 \\ \beta x_1 \end{pmatrix}$ ~~für ein~~

$(y_1) \cdot (-\beta x_2) + (y_2) \cdot (\beta x_1) = 0$

$\beta \cdot x_1 \cdot y_2 = \beta \cdot y_1 \cdot x_2$

$\beta_0 = 0$ ; für andere $\beta$:

$x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$

$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

$x_1 = -\frac{y_1 y_2}{x_2}$

$-\frac{y_1 \cdot y_2^2}{x_2^2} = y_1 \cdot x_2$

$-y_1 \cdot y_2^2 = y_1 \cdot x_2^2$

~~dann~~ $y_1 = 0$ oder:

$-y_2^2 = x_2^2$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -\beta x_2 \\ \beta x_1 \end{pmatrix}$

in $(*)$: $-\beta x_2 x_1 + \beta x_1 x_2 = 0 \quad \square$

Nur eine Richtung der Äquivalenz gezeigt: $y = \beta x^\perp \Rightarrow \langle y, x \rangle = 0$ −1

Janis Andrija Schnitzer

c) Beh.: $y = \alpha x + \beta x^{\perp}$

$$\alpha = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \quad ; \quad \beta = \frac{\langle y, x^{\perp} \rangle}{\|x\|^2}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \alpha x_2 + \beta x_1 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \alpha x_2 + \beta x_1 \end{pmatrix} = \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{\langle y, x^{\perp} \rangle}{\|x^{\perp}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot x_1 \\ \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-y_1 x_2 + y_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (-x_2) \\ \frac{-y_1 x_2 + y_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot (x_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{y_1 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2 x_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{y_1 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_1 x_2^2 - y_2 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{-y_1 x_2 x_1 + y_2 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{y_1 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \cancel{\frac{y_2 x_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \cancel{\frac{y_2 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}} \\ \cancel{\frac{y_1 x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \cancel{\frac{y_1 x_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{y_2 x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} y_1 x_1^2 + y_1 x_2^2 \\ y_2 x_2^2 + y_2 x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ y_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$ ✓ $\square$

gut

3/6

4. ~~Bew.: Sei $a+b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $a+b \in \mathbb{Q}$ ⇒ $a$~~

$a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$b \in \mathbb{Q}$

(a) Behauptung: $a+b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

**Annahme:**

Sei $a+b \in \mathbb{Q}$: Hier setzt du voraus, dass $a+b \in \mathbb{Q}$ ist, aber genau dies ist ja nicht der Fall. −1

Dann ist auch $(a+b)-b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a+(b-b) \in \mathbb{Q}$ schön :)

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$ ↯ □ ✓

(b) Behauptung: $a \cdot b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, falls $b \neq 0$

**Annahme:**

Sei $a \cdot b \in \mathbb{Q}$:

Dann ist auch $a \cdot b \cdot \frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$, falls $b \neq 0$ (s.o.)

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$ ↯ □ ✓

(c) Behauptung: $x, y \in \mathbb{Q}$ nur für $x = 0$ und $y = b$

Gegeben: $y = ax + b$

Fallunterscheidung:

1. Fall $x = 0$

$\Rightarrow y = 0 \cdot a + b = b \in \mathbb{Q}$ □

2. Fall $x \neq 0$:

**Annahme:**

Sei $y = ax + b \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{Q}$:

dann ist $y - b = ax \in \mathbb{Q}$;

dann ist $\frac{y-b}{x} = a \in \mathbb{Q}$ ↯ □ ✓

5/6

Dein Aufschrieb ist gut strukturiert! Super :)