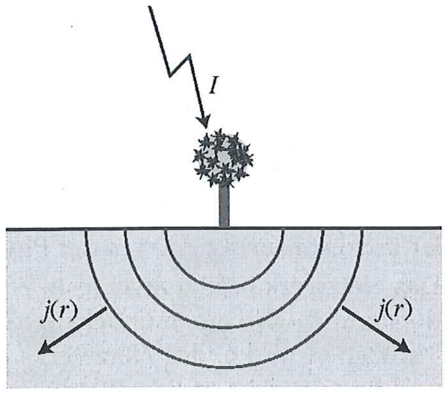
Jonathan Förste
Björn Juliger
Jannis Ludwija Schnitzer

Name(n): Gruppe: 15 Punkte: ___|___|___|___

6. Übungsblatt Experimentalphysik II SS 2012

Abgabe: **31.Mai–1. Juni 2012** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

6.1 Der Blitz (10 Punkte)



Ein Blitz schlägt in einen Baum, der frei auf einem großen Feld steht. Während der Dauer des Blitzes fließe ein Strom von $I = 100\,\mathrm{kA}$ durch den Baum in den Boden, wo er sich vom Baum aus in radialer Richtung ausbreitet. Der Boden besitze einen spezifischen Widerstand $\rho = 100\,\Omega\mathrm{m}$. Ein Mann und eine Kuh befinden sich etwa $r = 100\,\mathrm{m}$ vom Baum entfernt und sehen den Blitz einschlagen. Der linke Fuß des Mannes ist in radialer Richtung um $\Delta r_M = 0{,}5\,\mathrm{m}$ näher am Baum als der rechte. Der Abstand zwischen den Vorderbeinen der Kuh und dem Baum ist um $\Delta r_K = 1{,}5\,\mathrm{m}$ kürzer als der zwischen den Hinterbeinen und dem Baum.

a) Berechnen Sie die Potentialdifferenz $\Delta\phi$ zwischen den Füßen des Mannes, bzw. zwischen Vorder- und Hinterbeinen der Kuh.

b) Schätzen Sie den Strom ab, der durch Mann und Kuh fließt, wenn wir für beide einen Widerstand von $R = 4\,\mathrm{k}\Omega$ annehmen. Warum ist die exakte Rechnung sehr viel komplizierter?

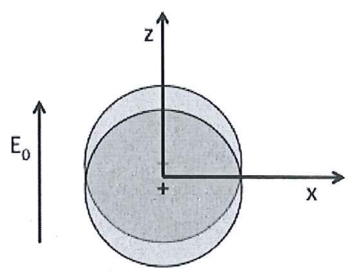
6.2 Innenwiderstand (10 Punkte)

Bei einer Taschenlampenbatterie fließt auch bei kurzgeschlossenen Polen nur ein Strom von einigen Ampere. Dies liegt am Innenwiderstand R_i der Batterie. In guter Näherung lässt sich das Verhalten der Batterie mit Hilfe einer Reihenschaltung aus einer idealen Spannungsquelle, die die Leerlaufspannung U_0 liefert, und einem Innenwiderstand R_i beschreiben. Nacheinander werden nun die Widerstände $R_1 = 10\,\Omega$ und $R_2 = 20\,\Omega$ an die Batterie angeschlossen und dabei die Ströme $I_1 = 0{,}50\,\mathrm{A}$ und $I_2 = 0{,}27\,\mathrm{A}$ mit einem in Reihe geschalteten (idealen) Amperemeter gemessen.

a) Wie groß ist die Leerlaufspannung U_0 und der Innenwiderstand R_i der Batterie.

b) Welchen Wert müßte ein Widerstand R_3 haben, damit er sich beim Anschließen an die Batterie maximal erwärmt?

6.3 Polarisierte Kugel (10 Punkte)



Eine nichtleitende Vollkugel mit Radius R befindet sich in einem elektrischen Feld mit der Feldstärke E_0 (siehe Skizze), das zu einer Polarisierung der Kugel führt. Auf der Oberfläche der Kugel werden Oberflächenladungen induziert, die ein elektrisches Feld erzeugen.

a) Skizzieren Sie die Oberflächenladungen.

b) Berechnen Sie den Beitrag der Oberflächenladung zum elektrischen Feld innerhalb der Kugel. Verwenden Sie das Superpositionsprinzip indem Sie eine homogen negativ geladene Kugel und eine homogen positiv geladene Kugel infinitesimal gegeneinander verschieben (siehe Skizze). Berechnen Sie für jede Kugel einzeln das erzeugte elektrische Feld für einen beliebigen Punkt innerhalb der Kugel. Summieren Sie dann die Beiträge beider Kugeln. Eine der beiden "virtuellen Kugeln" sei um eine Distanz $\delta/2$ nach oben, die andere um eine Distanz $\delta/2$ nach unten verschoben. Die Ladungsdichten der beiden "virtuellen Kugeln" sei $\rho^+ = \rho^- = \rho$. Die Größe $\sigma_0 = \rho\delta$ entspricht der Oberflächenladung an der Stelle an der die z–Achse die Kugel schneidet.

c) Man kann für die Flächenladungsdichte σ_p folgende Relation herleiten (siehe die entsprechenden Lehrbücher):

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \tag{1}$$

mit der Polarisation $\vec{P}$ (die ihrerseits mit dem elektrischen Feld zusammen hängt) und des Flächennormalenvektors $\vec{n}$. Das äußere elektrische Feld sei gegeben durch den Vektor $\vec{E_0}(\vec{r}) = E_0(0,0,1)$. Bestimmen Sie die Oberflächenladung als Funktion des Winkels θ, der Feldstärke E_0 und der Dielektrizitätskonstanten ϵ der Kugel. Der Winkel θ sei der Winkel zwischen der z–Achse und dem Flächennormalenvektor für einen bestimmten Punkt auf der Oberfläche.

6.4 Wheatstone-Brücke (10 Punkte)

Das unten dargestellte Netzwerk aus drei bekannten Widerständen R_1, R_2, R_3 und einem unbekannten Widerstand R_x wurde 1833 von Samuel Hunter Christie zur Bestimmung von R_x erfunden. Es wurde wenige Jahre später durch Arbeiten von Sir Charles Wheatstone populär und ist seit dem unter dessen Namen bekannt. Brückenschaltungen dieser Art bilden die Grundlage vieler Präzisionsmessungen in der Physik und vieler Sensorschaltungen im Alltag.

Das Netzwerk besitzt zwei feste Widerstände $R_1 = 800{,}00\,\Omega$, $R_2 = 200{,}00\,\Omega$, einen variablen Widerstand R_3 und einen unbekannten Widerstand R_x. Eine Spannungsquelle erzeugt zwischen den Punkten A und C des Netzwerks eine Potentialdifferenz $U_{AC} = 1\,\text{V}$. Zwischen den Punkten D und B ist ein sehr empfindliches Spannungsmessgerät angeschlossen. Wir nehmen an, dass dieses Spannungsmessgerät "ideal" ist, d.h. dass der Eingangswiderstand des Messgeräts unendlich ist, und daher bei der Spannungsmessung kein Strom durch das Gerät fließt.

Zur Bestimmung des unbekannten Widerstands R_x wird der Wert des variablen Widerstands R_3 so gewählt, dass die gemessene Spannung U_{DB} Null ist. Dieses Vorgehen wird häufig Nullabgleich genannt.

a) Wenden Sie die Kirchhoffschen Knoten- und Maschenregeln auf die 4 Knoten A, B, C und D und die drei Maschen des Netzwerks an. Stellen Sie auf diese Weise 7 Gleichungen auf. Nehmen Sie hierbei an, dass die Brücke noch nicht abgeglichen ist ($U_{DB} \neq 0$).

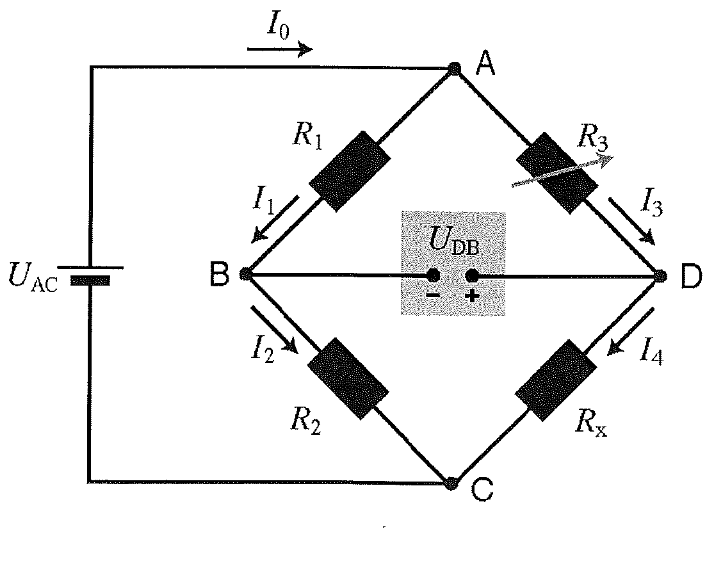
b) Der unbekannte Widerstand R_x sei ein temperaturabhängiger PT-100 Widerstand mit $R_x(\vartheta) = 100{,}0\,\Omega + 0{,}39\frac{\Omega}{°\text{C}}\,\vartheta$. Zum Abgleich der Brücke ($U_{DB} = 0$) wurde für den variablen Widerstand der Wert $R_3 = 438{,}92\Omega$ gewählt. Welchen Widerstand R_x besitzt der PT-100-Temperatursensor? **Lösen Sie zuerst die relevanten Teile des Gleichungssystem und setzen Sie erst dann Zahlenwerte ein!**

c) Geben Sie die Temperatur ϑ_0 des Sensors an.

d) Welche Heizleistung P wird im Temperatursensor frei.

e) Der PT-100-Sensor wird nun auf eine Temperatur von $\vartheta_1 = 50°\text{C}$ gebracht. Welche Spannung U_{DB} zeigt das Spannungsmessgerät an?

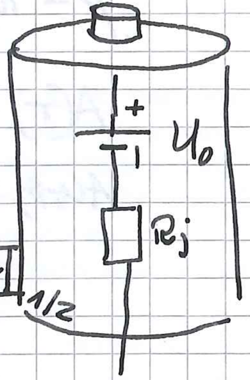
f) (* 2 Sonderpunkte) In der "Original" Wheatstone'schen Brückenschaltung befand sich zwischen den Punkten B und D ein nahezu ideales Strommessgerät (widerstandslos). Berechnen Sie für die in e) betrachtete Situation den Strom I_{DB} (statt der Spannung U_{DB}) den Wheatstone gemessen hätte.



and can be calculated in the given way we need to consider more information about the process to determine the exact current. ✓

6.2

a) $U = R \cdot I$



With $R_{1/2}$ connected to the battery, $U_0 = (R_i + R_{1/2}) I_{1/2}$

$\Rightarrow (R_i + R_1) I_1 = (R_i + R_2) I_2$

$\Rightarrow R_i = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}$

$\Rightarrow U_0 = (R_i + R_1) \cdot I_1$ can be calculated

$R_i = 55\,\Omega \quad U_0 = 33\,V$ ✓

b) $P = RI^2 = R_3 I_3^2 = R_3 \left(\frac{U_0}{R_i + R_3}\right)^2$

$\Rightarrow$ We see that this function of R_3 grows monotonously, thus maximum heat would be achieved with an infinite resistor. ✗

No. Maximum power is for $\frac{\partial P}{\partial R_3} = 0$

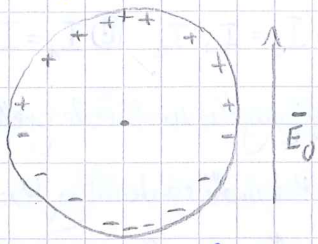
or if for $P = \frac{U_0^2}{\left(\frac{R_i}{\sqrt{R_3}} + \sqrt{R_3}\right)^2}$ the

denominator is zero $\Longrightarrow$

$R_3 = R_i$

Experimental Physics II – 6^{th} assignment

3.) a) As negatively charged particles will experience a force antiparallel to $\bar{E}_0$, and the positively charged a force parallel to $\bar{E}_0$, the former will gather as far down (the z-axis) as possible, while the latter will move as far up as possible.



b) First, we calculate the electric field inside a homogeneously charged sphere placed at the origin. Let ϱ denote the charge density with $\varrho = \frac{Q_{tot}}{V} = \frac{Q_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, where R is the radius of the full sphere and Q_{tot} its total charge. By the Gaussian law:

$\oint_A \bar{E}\,d\bar{A} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$, where Q_i is the charge inside the closed area A.

We choose A as a sphere with radius r, so that $|\bar{E}|$ is constant due to spherical symmetry. Thus, it follows that

$$\oint_A \bar{E}\,d\bar{A} = E\oint_A dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \text{ with } Q_i = \varrho V = \frac{Q_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q_{tot}}{R^3}\cdot r^3$$

$$\Longrightarrow E = \frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{Q_{tot}}{R^3\varepsilon_0}\,r^3 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{3Q_{tot}}{3R^3\varepsilon_0}\,r = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{Q_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3\varepsilon_0}}_{=\varrho/\varepsilon_0} r$$

$$\Longrightarrow E(r) = \frac{1}{3}\frac{\varrho}{\varepsilon_0} r \text{ resp. } \bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{3}\frac{\varrho}{\varepsilon_0}|\bar{r}|\,\hat{r} \text{ with } \hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$$

~~The, the~~

Therefore, we can now calculate the field of a sphere displaced by $\frac{1}{2}\bar{\delta} = \begin{pmatrix}0\\0\\\delta/2\end{pmatrix}$:

For the positively charged sphere displaced by $\frac{1}{2}\bar{\delta}$:

$$\bar{E}_+(\bar{r}) = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left|\bar{r}-\frac{1}{2}\bar{\delta}\right|\left(\bar{r}-\frac{1}{2}\bar{\delta}\right)^{\wedge} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\bar{r}-\frac{1}{2}\bar{\delta}\right)$$

Consequently, for the negatively charged sphere displaced by $-\frac{1}{2}\bar{\delta}$:

$$\bar{E}_-(\bar{r}) = \frac{-\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\bar{r}+\frac{1}{2}\bar{\delta}\right) \text{ (the sign „–" since this sphere is } \underline{\text{negatively}} \text{ charged)}$$

The actual field inside the polarised sphere is now given by the superposition of $\bar{E}_+$ and $\bar{E}_-$:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_+(\bar{r}) + \bar{E}_-(\bar{r}) = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\bar{r}-\frac{1}{2}\bar{\delta}\right) - \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\left(\bar{r}+\frac{1}{2}\bar{\delta}\right) = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\bar{\delta} = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\delta\,\hat{e}_z = \underline{\underline{-\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{e}_z}}$$

Thus, the electric field inside the polarized sphere is constant and parallel to the outer field.

This is the induced field $\bar{E}_{diel}$ & it "looks" to the opposite direction.

c) From the lecture, we know that the polarization is given by $\bar{P} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\bar{E}$.

The unit sphere of $\mathbb{R}^3$ is parametrized by $\bar{n} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$ in canonical polar coordinates φ, ϑ.

Therefore, it follows: $\sigma_p(\vartheta) = \bar{P}\cdot\bar{n} = (\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} = \underline{\underline{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E_0\sin\vartheta}}$

This is the TOTAL field, so:

$E_T = E_0 - E_{diel} = E_0 - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0$

$\sigma_p = |\bar{P}|\cdot\cos\vartheta$

Therefore: $\sigma_p = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\left(E_0 - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0\right)\cdot\cos\vartheta$.

4.) a) First, we apply the nodal rule that entering currents equal outgoing currents at every

Ⓐ $I_0 = I_1 + I_3$ Ⓑ $I_1 = I_2$ Ⓒ $I_2 + I_4 = I_0$ Ⓓ $I_3 = I_4$

Applying the mesh rule yields:

(e.g.): $I_1R_1 - I_2R_2$

Your known parameters are R & I not U (except U_{AC}) so Kirchoff's rules should be given as functions of I & R

For the mesh containing U_{AC}, R_1, R_2: $U_{AC} = \cancel{U_{AB} + U_{BC}}$ (M_1)

" " " U_{AC}, R_3, R_x: $U_{AC} = U_{AD} + U_{CD}$ (M_2)

" " " R_1, R_2, R_3, R_x: $U_{AD} + U_{DC} = U_{BC} + U_{AB}$ (M_3)

b) Since the Wheatstone-bridge is balanced ($U_{BD} = 0$), the voltages between (A and B) and (A and D) have to be equal (similarly (B and C) and (D and C)):

$U_{AB} = U_{AD}$ and $U_{BC} = U_{CD}$ (*)

~~Applying $I = \frac{U}{R}$ to Ⓐ yields:~~

~~U_{AC}~~ ~~$I_0 =$~~

Ⓐ & Ⓒ yield: $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ and with $I = \frac{U}{R}$ follows:

$$\frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AD}}{R_3} = \frac{U_{BC}}{R_2} + \frac{U_{DC}}{R_X}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) U_{AB} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_X}\right) U_{BC}$$

Ⓑ with $I = \frac{U}{R}$: $\frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{U_{BC}}{R_2} \Longrightarrow U_{AB} = \frac{R_1}{R_2} U_{BC}$

$$\Longrightarrow \left(\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3}\right) \frac{R_1}{R_2} U_{BC} = \frac{R_2 + R_X}{R_2 R_X} U_{BC}$$

$$\Longrightarrow \frac{R_1 + R_3}{R_2 R_3} U_{BC} = \frac{R_2 + R_X}{R_2 R_X} U_{BC}$$

$$\Longrightarrow \frac{R_1}{R_3} + 1 = 1 + \frac{R_2}{R_X} \Longrightarrow \underline{\underline{R_X = \frac{R_2 R_3}{R_1}}}$$

$$R_X = \frac{200\,\Omega \cdot 438{,}92\,\Omega}{800\,\Omega} = \underline{\underline{109{,}73\,\Omega}}$$

c) $R_X(\vartheta_0) = 109{,}73\,\Omega = 100\,\Omega + 0{,}39\,\frac{\Omega}{°C}\,\vartheta_0 \Longrightarrow \vartheta_0 \approx \underline{\underline{24{,}949\,°C}}$

d) $P = U \cdot I = \frac{U_{DC}^2}{R_X}$ and (M_2) $U_{AC} = U_{AD} + U_{CD} = \frac{R_3}{R_X} U_{CD} + U_{CD} = \left(\frac{R_3}{R_X} + 1\right) U_{CD}$

$$\Longrightarrow P = \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_X}}\right)^2}{R_X} U_{AC}^2 = \frac{1}{R_X\left(1 + \frac{R_3}{R_X}\right)^2} U_{AC}^2 = \frac{1}{109{,}73\,\Omega\left(1 + \frac{438{,}92\,\Omega}{109{,}73\,\Omega}\right)^2} (1\,V)^2 \approx \underline{\underline{3{,}65 \cdot 10^{-4}\,W}}$$

~~e)~~

<u>Experimental Physics II – 6th assignment</u>

4) e) Let $R_x := R_x(\vartheta_1)$.

~~$U_{BD} = U_{AD} - U_{AB} = R_3 I_3 - R_1 I_1 = U_{AD} - U_{AB} = \frac{R_3}{R_1+R_2} U_{AC} - \frac{R_1}{R_3+R_x} U_{AC}$~~

~~Here, $U_{AD} = \frac{R_3}{R_1+R_2} U_{AC}$ and $U_{AB} = \frac{R_1}{R_3+R_x} U_{AC}$ follow from $I_3 = \frac{U_{AC}}{R_1+R_2}$ and $I_1 = \frac{U_{AC}}{R}$~~

$U_{BD} = U_{AD} - U_{AB} = -R_3 I_3 + R_1 I_1$ with $I_3 = \frac{U_{AC}}{R_3+R_x}$ and $I_1 = \frac{U_{AC}}{R_1+R_2}$, since (R_3+R_x) and (R_1+R_2) can be viewed as the total resistances of two parallel conduits between A and C. Thus:

$$U_{BD} = -R_3 \frac{U_{AC}}{R_3+R_x} + R_1 \frac{U_{AC}}{R_1+R_2} = \left(-\frac{R_3}{R_3+R_x} + \frac{R_1}{R_1+R_2}\right) U_{AC}$$

$$= \left(\frac{-438{,}82\,\Omega}{438{,}82\,\Omega + (400\,\Omega + 0{,}39\frac{\Omega}{°C}\cdot 50°C)} + \frac{800\,\Omega}{800\,\Omega + 200\,\Omega}\right)\cdot 1\,V$$

$$\approx + 0{,}014\,V$$

f) $I_{DB} = I_2 - I_1$. Now, the ~~meshes are~~ nodes have changed, since current can flow between B and D, but there is no voltage between B and D, because the resistance of an ideal amperemeter is infinite.

(B) $I_1 + I_{DB} = I_2$ and (D) $I_3 = I_{DB} + I_4$

Since (A) and (C) have not changed, (A) = (C) yields: $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

Since $U_{BD} = 0$: $U_{AB} = U_{AD} \Rightarrow R_1 I_1 = R_3 I_3 \Rightarrow \frac{R_3}{R_1} I_3 = I_1$

and $U_{BC} = U_{DC} \Rightarrow R_2 I_2 = R_4 I_4 \Rightarrow I_2 = \frac{R_4}{R_2} I_4$

$$\Rightarrow I_1 + \frac{R_1}{R_3} I_1 = I_2 + \frac{R_2}{R_4} I_2$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) I_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_4}\right) I_2$$

$$\Rightarrow I_{DB} = I_2 - I_1 = \frac{1+\frac{R_1}{R_3}}{1+\frac{R_2}{R_4}} I_1 - I_1 = \left(\frac{1+\frac{R_1}{R_3}}{1+\frac{R_2}{R_4}} - 1\right) I_1$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{R_1}{R_3} - 1 - \frac{R_2}{R_4}}{1+\frac{R_2}{R_4}}\right) I_1 = \frac{\frac{R_1}{R_3} - \frac{R_2}{R_4}}{1+\frac{R_2}{R_4}} I_1$$

Since $I_0 = I_1 + I_3$ and $I_1 = \frac{R_3}{R_1} I_3$: $I_0 = \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) I_1$

$$\Rightarrow I_{DB} = \frac{\frac{R_1}{R_3} - \frac{R_2}{R_4}}{1+\frac{R_2}{R_4}} \frac{I_0}{1+\frac{R_3}{R_1}} \text{ with } I_0 = \frac{U_{AC}}{R_{ges}} = \left(\frac{1}{R_1+R_2} + \frac{1}{R_3+R_x}\right) U_{AC}$$

$$\Rightarrow \cancel{I_{DB}} = R_x(\vartheta_1) = R_4 = 119{,}5\,\Omega$$

$$\Rightarrow I_{DB} \approx 1\cdot 10^{-4}\,A$$

very good! but...
(actually is $I_{DB} = 55.1\,\mu A$)