Name(n): Jonathan Förste
Björn Jüliger
Jannis Andrija Schnitzer
Gruppe: Punkte: ____|____|____|____

4. Übungsblatt Experimentalphysik II SS 2012

Abgabe: **18.,21. Mai 2012** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

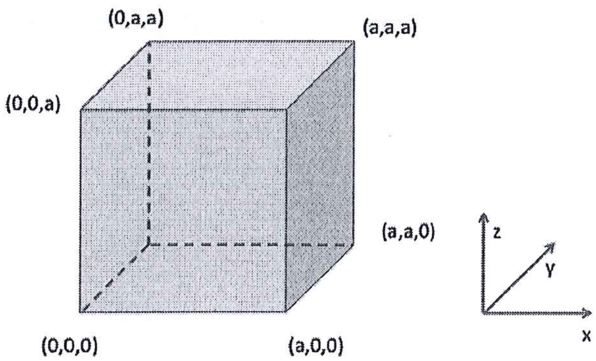
4.1 Gaußscher Satz (10 Punkte)

Die Divergenz eines Vektorfeldes haben Sie im letzten Semester bereits in der Theorie kennen gelernt. In dieser Aufgabe geht es um die Verwendung der Divergenz im Gaußschen Satz. Beachten Sie, daß je nach Lehrbuch drei synonyme Schreibweisen verwendet werden:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}$$

Beweisen Sie den Gaußschen Satz:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\vec{F}\right) dV = \int_A \vec{F} d\vec{A} \qquad (1)$$



$\vec{F}$ bezeichnet ein beliebiges Vektorfeld. Das Volumen V sei von der Fläche A umschlossen. Der Term $\vec{F}d\vec{A}$ bezeichnet die Komponente des Vektorfeldes $\vec{F}$ die senkrecht auf der Fläche A steht und nach außen zeigt. Das Integral auf der rechten Seite wird über die ganze Außenfläche ausgeführt. Das Integral auf der linken Seite wird über das entsprechende Volumen bestimmt. Betrachten Sie das skizzierte würfelförmige Volumen:

a) Bestimmen Sie den rechten Teil der Gleichung 1, indem Sie Ausdrücke für alle sechs Seitenflächen einzeln bestimmen und aufsummieren.

b) Vereinfachen Sie den gefundenen Ausdruck durch Verwendung von Relationen der folgenden Form:

$$F_x(a,y,z) - F_x(0,y,z) = \int_0^a \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \qquad (2)$$

F_x bezeichne die x–Komponente des Vektors $\vec{F}$. Nun können Sie den entstandenen Ausdruck umformen und erhalten den Term auf der linken Seite der Gleichung.

c) Berechnen Sie die Divergenz für folgende Vektorfelder und interpretieren Sie Ihr Ergebnis: $\vec{F_1} = (x,y,z)$, $\vec{F_2} = (-y,x,0)$ und $\vec{F_3} = (x,x^2y,5)$.

4.2 Homogen geladene Vollkugel(10 Punkte)

a) Leiten Sie einen Ausdruck für den Feldstärken- und Potentialverlauf $E(r)$ und $\phi(r)$ für eine homogen geladene Vollkugel her (Radius R, Ladung Q). Unterscheiden Sie hierzu die Fälle $r \leq R$ und $r \geq R$.

b) Skizzieren Sie $E(r)$ und $\phi(r)$.

c) Wie groß ist die Arbeit, die man aufwenden muss, um eine Probeladung q

- I) von $r = \infty$ bis $r = R$,
- II) von $r = R$ bis $r = 0$ zu bringen,

wenn $\phi(r = \infty) = 0$ sein soll?

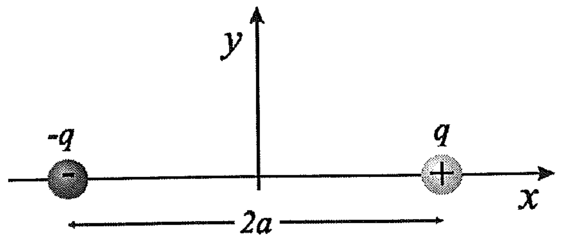
4.3 Elektrischer Dipol (10 Punkte)

a) Geben Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ an, dass durch den skizzierten Dipol erzeugt wird. $\vec{r}_1$ ($\vec{r}_2$) sei der Ortsvektor der positiven (negativen) Ladung.

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$ in der x–y–Ebene. Sie dürfen hierzu auch gerne ein Computerprogramm verwenden (z.B. Mathematica).

c) Skizzieren Sie die Feldlinien des elektrischen Feldes sowie die Äquipotentiallinien der in der Skizze gezeigten Ladungsverteilung (elektrischer Dipol mit Dipolmoment $p = 2aq$). Auch hierzu dürfen Sie Software verwenden.

d) Berechnen Sie das Feld als Funktion von p für $a \ll x$, bzw. $a \ll y$ auf der x- und der y-Achse.



4.4 Energiefilter (10 Punkte)

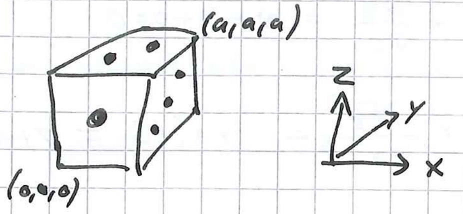
Ein Elektron fliegt entlang der Symmetrieachse durch einen elektrisch negativ geladenen Drahtring (Radius $R = 2{,}5\,\mathrm{cm}$, Drahtdicke vernachlässigbar, Ladung $Q = -10\,\mathrm{nC}$).

a) Berechnen Sie das elektrische Potential im Zentrum des Rings. Verwenden Sie hierbei die gängige Konvention, dass das Potential unendlich weit von einer Ladungsverteilung entfernt Null ist.

b) Welche kinetische Energie muss das Elektron in großem Abstand vom Ring mindestens besitzen, um durch den Ring hindurch fliegen zu können und nicht reflektiert zu werden? Geben Sie das Ergebnis in den Einheiten J und eV (Elektronenvolt) an.

c) Berechnen Sie die zugehörige Geschwindigkeit des Elektrons.

4.1 Considering the following ~~cube~~ dice:



with edge length a.

(The sum of the pips on opposing faces always add up to seven, thereby each of the six sides of the dice can be identified by a number from 1…6)

a) Calculating $\int_A \bar{F} d\bar{A}$ for the six sides:

$$\boxed{\cdot}\quad \int_{A_1} \bar{F} d\bar{A} = -\int_0^a\int_0^a \bar{F}(x,0,z)\cdot\hat{e}_y \cdot dx\,dz = -\int_0^a\int_0^a F_y(x,0,z)\,dx\,dz$$

$$\boxed{\cdot\,\cdot}\quad \int_{A_2} \bar{F} d\bar{A} = +\int_0^a\int_0^a \bar{F}(x,y,a)\cdot\hat{e}_z\, dx\,dy = +\int_0^a\int_0^a F_z(x,y,a)\,dx\,dy$$

$$\boxed{\cdot\cdot\cdot}\quad \int_{A_3} \bar{F} d\bar{A} = +\int_0^a\int_0^a \bar{F}(a,y,z)\cdot\hat{e}_x\, dy\,dz = +\int_0^a\int_0^a F_x(a,y,z)\,dy\,dz$$

$$\boxed{::}\quad \int_{A_4} \bar{F} d\bar{A} = -\int_0^a\int_0^a \bar{F}(0,y,z)\cdot\hat{e}_x\, dy\,dz = -\int_0^a\int_0^a F_x(0,y,z)\,dy\,dz$$

$$\boxed{:\cdot:}\quad \int_{A_5} \bar{F} d\bar{A} = -\int_0^a\int_0^a \bar{F}(x,y,0)\cdot\hat{e}_z\, dx\,dy = -\int_0^a\int_0^a F_z(x,y,0)\,dx\,dy$$

$$\boxed{:::}\quad \int_{A_6} \bar{F} d\bar{A} = +\int_0^a\int_0^a \bar{F}(x,a,z)\cdot\hat{e}_y\, dx\,dz = +\int_0^a\int_0^a F_y(x,a,z)\,dx\,dy$$

Thus, $\int_A \bar{F} d\bar{A} = -\int_0^a\int_0^a F_y(x,0,z)\,dx\,dz + \int_0^a\int_0^a F_z(x,y,a)\,dx\,dy$
$+ \int_0^a\int_0^a F_x(a,y,z)\,dy\,dz - \int_0^a\int_0^a F_x(0,y,z)\,dy\,dz$
$- \int_0^a\int_0^a F_z(x,y,0)\,dx\,dy + \int_0^a\int_0^a F_y(x,a,z)\,dx\,dz$

$$= \int_0^a\int_0^a F_x(a,y,z) - F_x(0,y,z)\,dy\,dz$$
$$+ \int_0^a\int_0^a F_y(x,a,z) - F_y(x,0,z)\,dx\,dz$$
$$+ \int_0^a\int_0^a F_z(x,y,a) - F_z(x,y,0)\,dx\,dy$$

b)

$$= \int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\partial F_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\partial F_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{\partial F_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_V \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\,dV$$

$$= \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{F}\,dV \qquad \text{where } \bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

"□"

c) $\operatorname{div} \bar{F_1} = \frac{\partial F_1^x}{\partial x} + \frac{\partial F_1^y}{\partial y} + \frac{\partial F_1^z}{\partial z} = 1+1+1=3$

$\operatorname{div} \bar{F_2} = \frac{\partial F_2^x}{\partial x} + \frac{\partial F_2^y}{\partial y} + \frac{\partial F_2^z}{\partial z} = 0+0+0=0$

$\operatorname{div} \bar{F_3} = \frac{\partial F_3^x}{\partial x} + \frac{\partial F_3^y}{\partial y} + \frac{\partial F_3^z}{\partial z} = 1+x^2+0 = 1+x^2.$

Interpretation:

By integration over a volume, we can relate the divergence of a force field to the sum of forces traversing a surface that surrounds this volume.

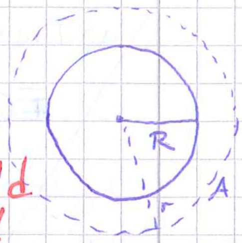
So we can tell the ~~amount of~~ net value of force traversing A is linear in V when located in F_1.

In F_2, $\int_A \bar{F} d\bar{A}$ will always be zero, which means the sum of forces that enter and leave any volume V is always zero (in other words: the force "entering" any volume equals the force "leaving" ~~that~~ volume.)

For F_3, the value of the forces traversing any A gets larger quadratically the farther we move away from the origin in x direction; apart from that it is linear in volume similar to F_1.

Experimental Physics II – ~~4~~ 4th assignment

4.2.



a) For $r < R$, the electric field is zero, as we are inside a conductor, and thus, the potential is constant. ✗ as we discussed the sphere is solid there is $E(r)$ inside!

For $r \geq R$, we apply the Gaussian theorem to a sphere with radius r centered around the center of the charged orb:

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{A} = E \oint_A dA = E \cdot 4\pi r^2 \overset{!}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

since the field has to be the same at every point with distance r from the orb's center due to the full rotational symmetry induced by the orb's homogeneity. Thus, it follows: ✓

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{resp.} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r},$$ ✓ where $\hat{r} := \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ is the unit vector of $\vec{r}$.

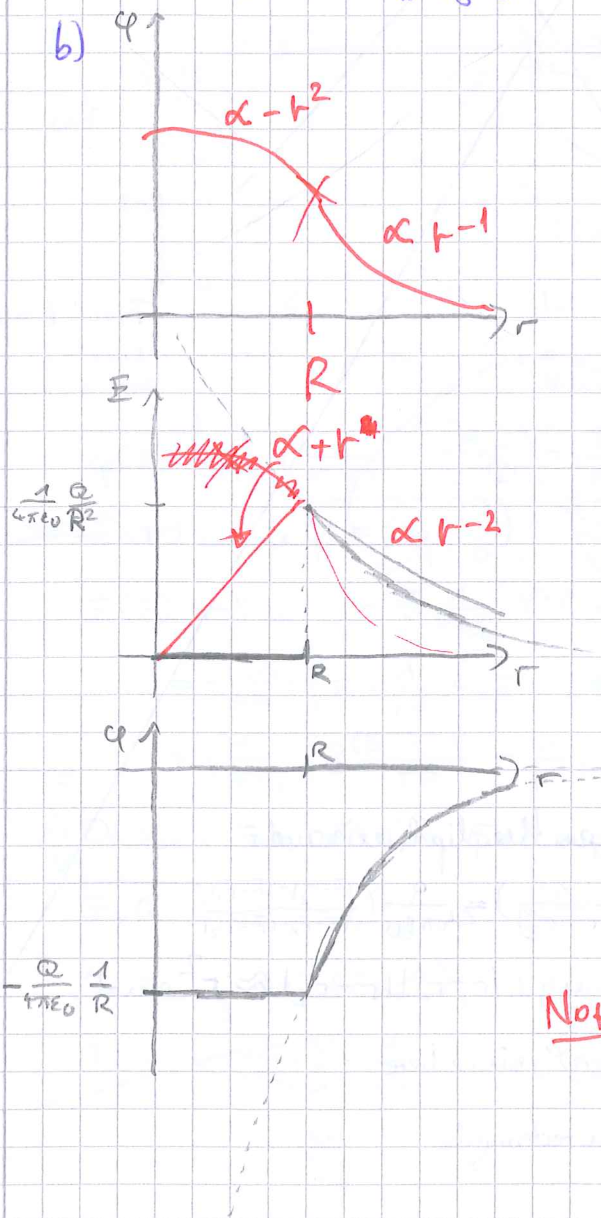
With $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, we easily verify that

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r E(r)\,dr$$

$$\varphi(\vec{r}) = \cancel{-}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|} \quad \text{because} \quad -\vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

as $$\partial_x \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \Rightarrow \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{1}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

b)



Since potentials are required to be continuous, the potential for $r < R$ must equal $\varphi(R)$.

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}, & |\vec{r}| \geq R \\ \cancel{-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}}, & |\vec{r}| < R \end{cases}$$

we solved it in the tutoring

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}, & |\vec{r}| \geq R \\ \cancel{0}, & |\vec{r}| < R \end{cases}$$

c)

I.) $$W_{el} = q\int_\infty^R E(r)\,dr = q(\varphi(R) - \varphi(\infty)) = \underline{\underline{+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{R}}}$$ ✓

II.) $$W_{el} = q\int_0^R E(r)\,dr = q\int_0^R 0\,dr = \underline{\underline{0}}$$

Since, inside the orb, no field exists, there is no work required to move a charge q around.

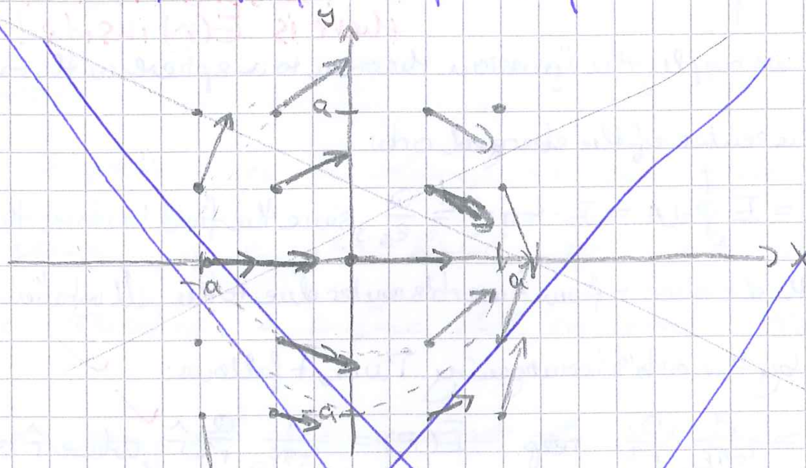
__Note:__ This was not a hallow (Gauss sphere!). The problem specifically states: "solid" sphere...

4.3.

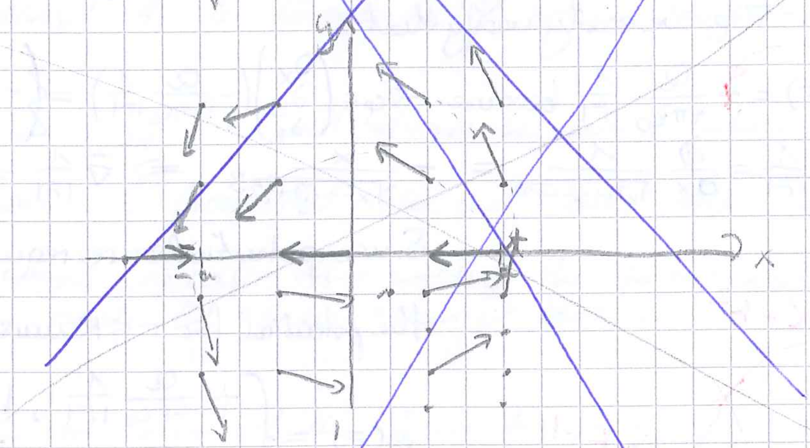
a) The total electric field is the sum of the individual electric fields:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}}_{\text{field of } +q} + \underbrace{\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}}_{\text{field of } -q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right)$$

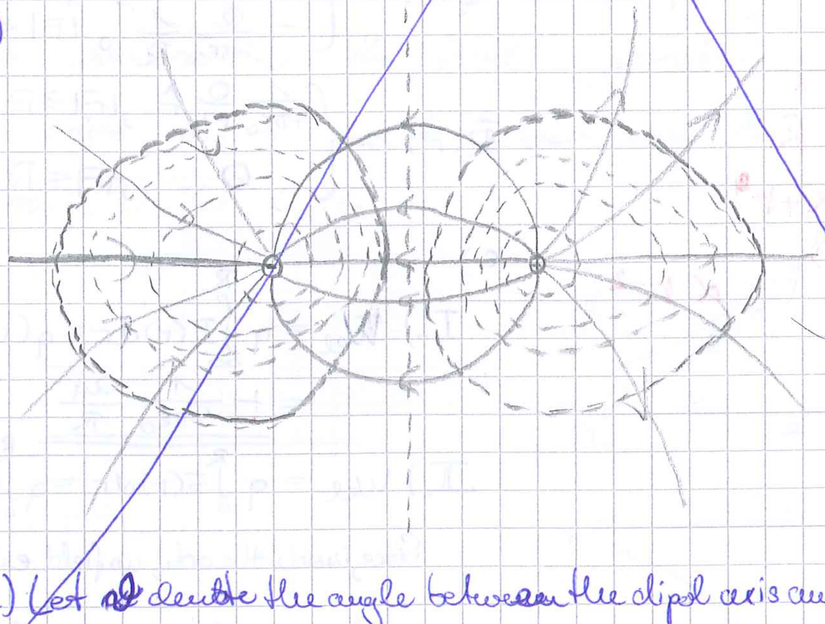
b)



see attached print.

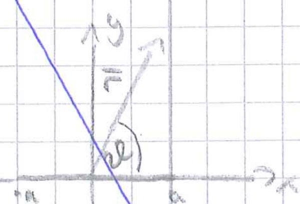


c)



Field line
line of equal potential

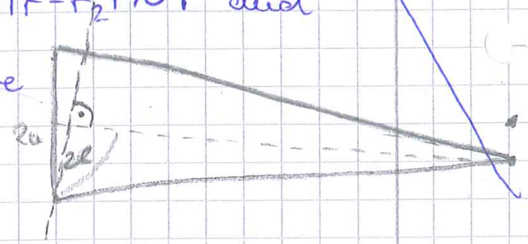
d) Let ϑ denote the angle between the dipol axis and $\vec{r}$.



In $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_2|-|\vec{r}-\vec{r}_1|}{|\vec{r}-\vec{r}_1||\vec{r}-\vec{r}_2|}\right)$

we approximate for $a<<x, a<<y$: $|r-r_1||r-r_2| \approx r^2$ and

$|\vec{r}-\vec{r}_2| - |\vec{r}-\vec{r}_1| \approx 2a\cos\vartheta$, since here



2a is a good approximation for the rectangular triangle shown.

Experimental Physics II – 4th assignment

4.3)

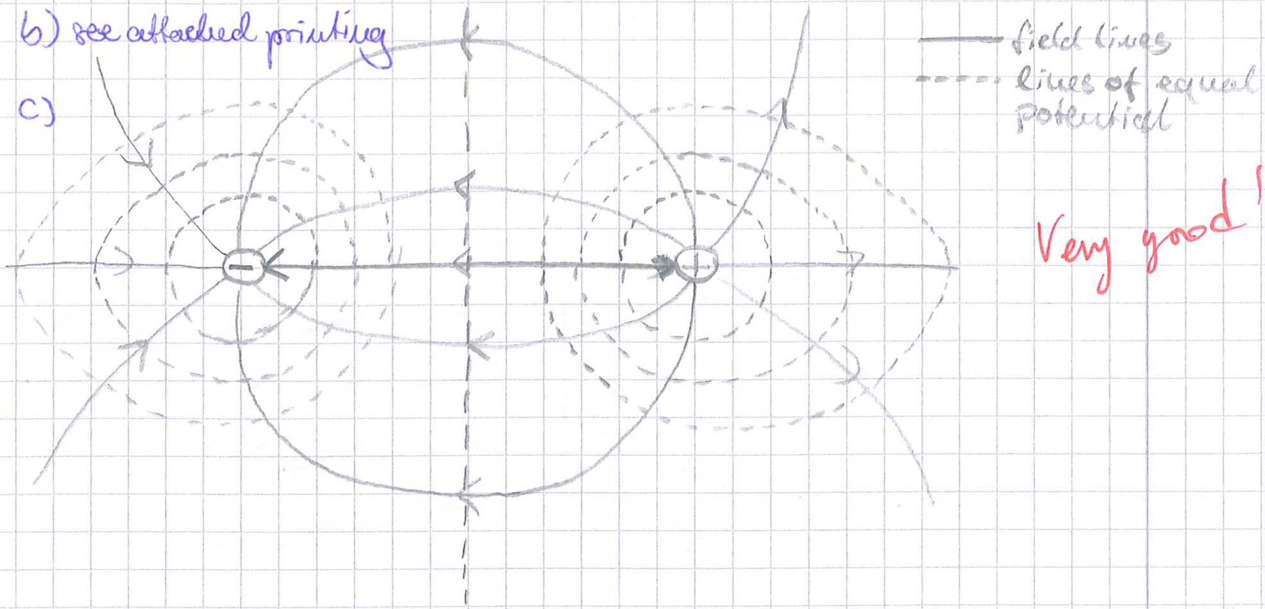
a) The total electric field is the superposition of the individual fields:

$$\vec{E}(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r - \vec r_1}{|\vec r - \vec r_1|^3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r - \vec r_2}{|\vec r - \vec r_2|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec r - \vec r_1}{|\vec r - \vec r_1|^3} - \frac{\vec r - \vec r_2}{|\vec r - \vec r_2|^3}\right)$$

with potential $\varphi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec r - \vec r_1|} - \frac{1}{|\vec r - \vec r_2|}\right)$

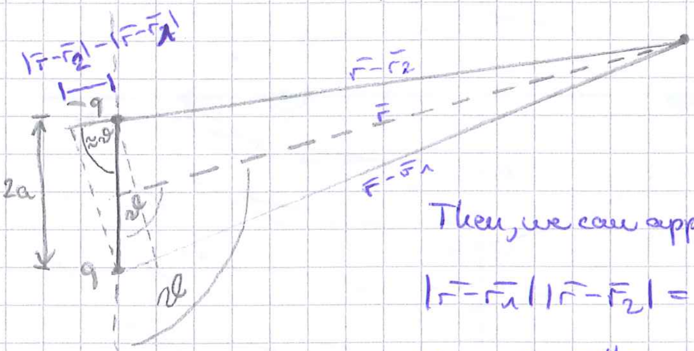
b) see attached printing

c)



Very good!

d)



Let ϑ denote the angle between the dipole axis and $\vec r$.

Then, we can approximate for $a \ll x, a \ll y$:

$|\vec r - \vec r_1||\vec r - \vec r_2| = r^2$ and $|\vec r - \vec r_2| - |\vec r - \vec r_1| = 2a\cos\vartheta$,

since $\vec r - \vec r_2 \parallel \vec r$ almost holds. Thus, we find:

$$\varphi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec r - \vec r_1|} - \frac{1}{|\vec r - \vec r_2|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{|r - r_2| - |r - r_1|}{|r - r_2||r - r_1|}\right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p \cdot \vec r}{r^3}$$

~~$\Rightarrow \vec E(\vec r)$~~ with $\vec p = 2q\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec E(\vec r) = -\vec\nabla\varphi = -\vec\nabla\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p \cdot \vec r}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec\nabla\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec\nabla(\vec p\cdot\vec r)\cdot\frac{1}{r^3} + (\vec p\cdot\vec r)\vec\nabla\frac{1}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec p\cdot\frac{1}{r^3} + (\vec p\cdot\vec r)(-3)\frac{\vec r}{r^5}\right) \quad [\text{with } \vec\nabla r^n = n\vec r r^{n-2} \text{ and } \vec\nabla(\vec x\cdot\vec r) = \vec x]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{(\vec p\cdot\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{1}{r^3}\vec p\right)$$

On the x-axis ($\vec r \parallel \vec e_x$), $\vec p\cdot\vec r = px$, ~~since~~ $\vec r \parallel \vec p$, so the field ~~has~~ also only x-components:

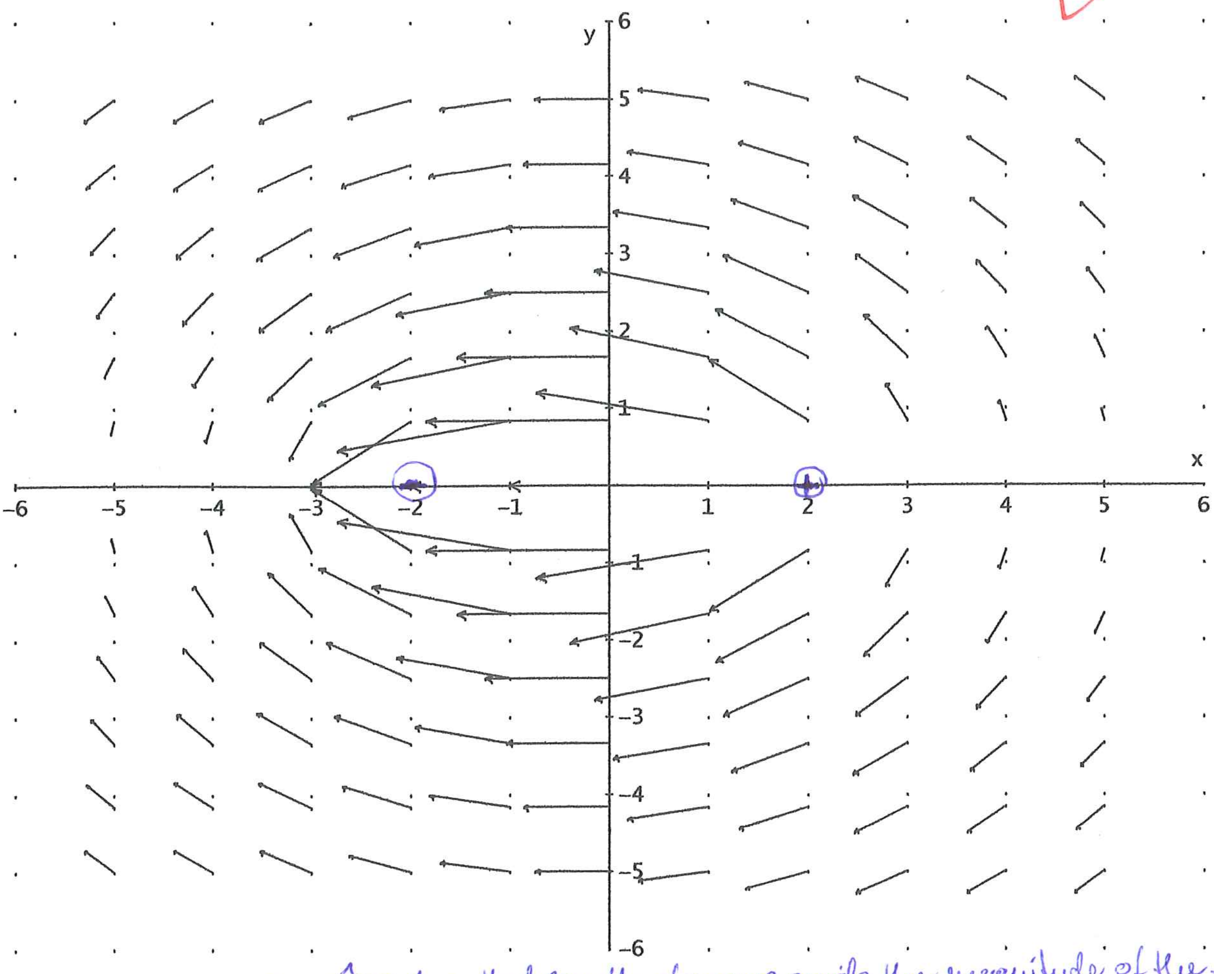
$$E_x((x,0,0)^T) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{px^2}{x^5} - \frac{p}{x^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\frac{p}{x^3}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3} \Rightarrow \vec E(\vec r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p}{r^3}$$

On the y-axis ($\vec r \parallel \hat e_y$), $\vec r \perp \vec p$ holds and thus $(\vec p\cdot\vec r) = 0$, so we find:

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^3}\vec p\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p}{r^3}}}$$

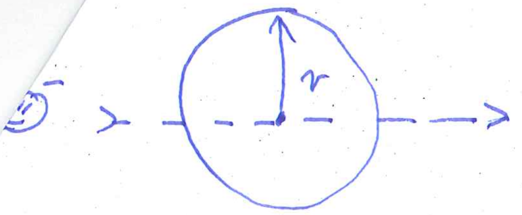
$-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y^3}\vec e_x$

important: There is field ONLY in the x-direction [redacted] [redacted]



Drawn with $a = 2$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \equiv 1$, so that length of arrows equals the magnitude of the field times $4\pi\varepsilon_0$.

a)



Since we are in the centre of the ring, the distance to every part is r. Therefore we have a one-dimentional problem, that is simply integrable.

$$F = \frac{q_1 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad E = \frac{F}{q_1} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\int_{\infty}^{r'} E\,dr = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

✓

For $\Phi(r)$ being 0 for $r \Rightarrow \infty$ C has to be 0 as well $\Rightarrow \Phi(r) = + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\Phi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$= -3595\,V$

b) $E_{pot} = E_{kin\,min} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{-10\,nC}{4\pi\, 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 0{,}025m}$

$[E_{pot}] = \frac{C\,Vm}{As\;m} = V$

$= 3595{,}1\,eV$ ✓

$= 5{,}7593 \cdot 10^{-16} J$ ✓

For one electron the kinetic energy equals the voltage accelerating it in eV. We got only one electron so the numeric value equals the voltage of the potential

c) $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31} kg$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m} E}$ $\qquad v = 3{,}556 \cdot 10^{-7} \frac{m}{s} \approx 0{,}1\,c$

✓