X

Name(n): Jannis Andrija Schnitzer, Mathias Renz Gruppe: 15 Punkte: ____|____|____|____

2. Übungsblatt Experimentalphysik II SS 2012

Abgabe: **3.-4. Mai 2012** im Gruppenunterricht **2,25 Seiten!**

2.1 Kreisprozess (10 Punkte)

Ein ideales Gas wird zunächst von V_1 nach V_2 adiabatisch komprimiert, dann wird der Druck isochor von p_2 auf p_3 erhöht. Es folgt eine adiabatische Expansion von V_3 nach V_4 und schließlich wird der Druck isochor von p_4 auf p_1 erniedrigt.

a) Skizzieren Sie diesen Prozess in einem p–V–Diagramm.

b) Berechnen Sie die Änderung der Wärmemenge, der geleisteten Arbeit und der inneren Energie für jedes Teilstück.

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad dieser Maschine. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit, dass es nur noch von den Temperaturen T_4 und T_3 abhängt.

2.2 Carnot (10 Punkte)

Der Carnot Prozess ist der reversible Kreisprozess mit dem höchsten theoretisch möglichen Wirkungsgrad. Dies lässt sich mit Hilfe des T–S–Diagramms zeigen. Das T–S–Diagramm bietet eine zusätzliche Möglichkeit zum p–V–Diagramm den Zustand eines Arbeitsgases einer Wärmekraftmaschine zu charakterisieren und Kreisprozesse zu interpretieren. Aufgetragen wird die Temperatur T gegen die Entropie S.

Der Carnot Prozess bestehe aus folgenden Teilstücken:

- $1 \longrightarrow 2$: Isotherme Expansion
- $2 \longrightarrow 3$: Adiabatische Expansion
- $3 \longrightarrow 4$: Isotherme Kompression
- $4 \longrightarrow 1$: Adiabatische Kompression

a) Zeichnen Sie diesen Kreisprozess in ein T–S–Diagramm. Die Punkte $(1, 2, 3, 4)$ bezeichnen die jeweiligen Anfangs- bzw. Endpunkte der Zustandsänderungen.

b) Berechnen Sie die zugeführte Wärme Q_{12} in Abhängigkeit der hierfür relevanten Temperaturen T_i und Entropien S_i im T–S–Diagramm. Verwenden Sie die Relation $dQ = TdS$.

c) Berechnen Sie die abgeführte Wärme Q_{34}.

d) Der Wirkungsgrad η ist der Quotient aus der mechanischen Arbeit, die das Gas leistet und investierter Wärme. Aufgrund der Energieerhaltung kann η folgendermaßen berechnet werden:

$$\eta = \frac{|Q_{12}| - |Q_{34}|}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} \tag{1}$$

Berechnen Sie den Wirkungsgrad und vergleichen Sie diesen mit dem berechneten Wirkugsgrad für den Carnot Prozess aus der Vorlesung.

Wie muss man also ein T–S– Diagramm interpretieren, um den Wirkungsgrad eines Kreisprozesses zu bestimmen?

Warum hängt der Wirkungsgrad nicht von der Entropiedifferenz $(S_1 - S_2)$ ab?

e) Zeichnen Sie in das T–S–Diagramm des Carnot Prozess einen weiteren beliebigen Kreisprozess ein. Hierbei soll die maximale Temperatur gleich der maximalen Temperatur des Carnot Prozess sein. Die minmale Temperatur entspreche der minimalen Temperatur des Carnot Prozess. Analog gelte dies für die Entropien. (Wir haben in der Teilaufgabe d) gelernt, dass der Wirkungsgrad unabhängig von der Entropiedifferenz ist, daher lässt sich immer ein Carnot-Prozess konstruieren, der zwischen den Temperaturen T_1 und T_2 läuft und so angepasst werden kann, dass die entsprechende minimale und maximale Entropie den entsprechenden Werten des betrachteten beliebigen Prozesses entspricht.)

f) Begründen Sie nun anhand der Skizze, warum ein beliebiger Kreisprozess maximal den Wirkungsgrad des Carnot Prozess hat.

2.3 Entropiezunahme (10 Punkte)

Zwei Volumina V_A und V_B sind durch eine Trennwand separiert und jeweils mit einem Gas gefüllt. Das Volumen V_A ist mit N_A Atomen der Sorte A gefüllt; das Volumen V_B ist mit N_B Atomen der Sorte B gefüllt. In beiden Volumina herrsche die gleiche Temperatur und der gleiche Druck. Nehmen Sie an, dass das System vollständig von der Umwelt isoliert ist.

Die Trennwand wird geöffnet und es kommt zu einer Durchmischung durch Diffusion. Nach einer hinreichend langen Zeit ist das System vollständig durchmischt und man kann von einem neuen Gleichgewichtszustand ausgehen.

Da es sich um einen irreversiblen Prozess handelt, hat die Entropie zugenommen. Bestimmen Sie die Entropiezunahme $\Delta S(N_A, N_B)$. Begründen Sie hinreichend die durchgeführten Rechenschritte.

2.4 Wärmeleitung (10 Punkte)

Man betrachte einen unendlich langen Kupferstab mit der Querschnittsfläche A und der Temperatur T_0. Der Stab werde an der Stelle $x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ kurz erhitzt (z.B. durch eine Punktschweißung). Ihm wird eine Wärmemenge Q zugeführt. In dieser Aufgabe wird die Wärmeausbreitung entlang des Stabs studiert. Die Funktion $T(x,t)$ beschreibt die Temperatur an jedem Punkt x entlang des Stabes und zu jedem Zeitpunkt t. Die Funktion $T(x,t)$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit der Temperaturprofile beschrieben werden können. es ist eine partielle Differentialgleichung (1. Ordnung in der Zeit, 2. Ordnung im Ort). Sie kann aus dem 1. Fickschen Gesetz in Kombination mit der Kontinuitätsgleichung hergeleitet werden.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die eindimensionale Wärmeasubreitung auf. Verwenden Sie folgende Ihnen aus der Vorlesung bekannten Relationen:

$$j_Q = -\lambda A \frac{dT(x,t)}{dx} \tag{2}$$

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = -\frac{1}{A\rho c}\frac{dj_Q}{dx} \tag{3}$$

mit $j_Q = \frac{dQ}{dt}$ als Wärmestrom.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion:

$$T(x,t) = T_0 + Ct^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{-x^2}{4at}} \tag{4}$$

eine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{5}$$

ist.

c) Wieviel Wärme Q wurde zugeführt, wenn nach einer Minute am Ort der Wärmequelle immer noch ein Temperaturunterschied von $\Delta T = 70\,\mathrm{K}$ vorhanden ist? Es gilt: $\Delta T = T(0,t) - T_0$.

d) Wie groß ist die maximale Temperaturerhöhung, die der Stab in 10 cm Entfernung vom Ort der Wärmequelle erfährt, und nach welcher Zeit wird diese erreicht?

e) Skizzieren sie den zeitlichen Temperaturverlauf an der Stelle $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$.

Zusätzliche Angaben:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{6}$$

$$C = \frac{Q}{c\rho A\sqrt{4\pi a}} \tag{7}$$

$$A = 0{,}25\,\mathrm{cm}^2 \tag{8}$$

$$\rho = 8{,}96 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3 \tag{9}$$

$$c = 383\,\mathrm{J/(kg \cdot K)} \tag{10}$$

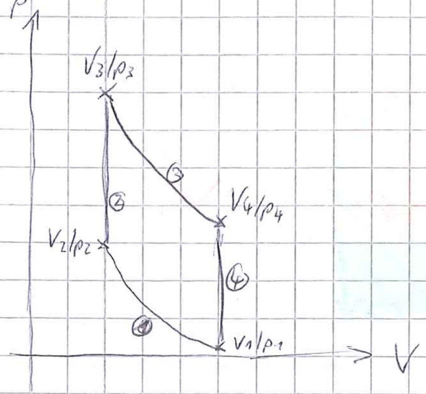
$$\lambda = 384\,\mathrm{W/(m \cdot K)} \tag{11}$$

Hierbei ist c die spezifische Wärmekapazität (Beachten Sie den Unterschied: c – C). ρ ist die Dichte des Materials und λ ist die Wärmeleitfähigkeit.

Experimental physics II, sheet 2

Jannis Andrija SCHNITZER
Melika RENZ

2.1 a)



b) Heat: ① and ③ are adiabatic processes $\Rightarrow \Delta Q_{1/3} = 0$

$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12}$

②: $\Delta Q_2 = \frac{3}{2} nR \,\Delta T_2 \underset{pV=nRT}{=} \frac{3}{2}(p_3 V_3 - p_2 V_2) \underset{V_3=V_2}{=} \frac{3}{2} V_2 (p_3 - p_2) = \frac{3}{2} nR (T_2 - T_1) = nC_V(T_2 - T_1)$

④: calculation like ②, $\Delta Q_4 = \frac{3}{2} V_1 (p_1 - p_4)$

$\Delta U_{41} = \Delta Q_{41} = nC_V(T_1 - T_4)$

Work: ② and ④ are isochoric processes $\Rightarrow \Delta W_{2/4} = 0$

① $\Delta W_1 = \Delta U_1 = -\int p\,dV = -\int \frac{nRT}{V}\,dV = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

③ $\Delta W_3 = -nRT \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$

it is adiabatic. (Not isothermal)

Energy: ① $\Delta U_1 = \Delta W_1$

② $\Delta U_2 = \Delta Q_2$

③ $\Delta U_3 = \Delta W_3$

④ $\Delta U_4 = \Delta Q_4$

$$\Delta U_{12} = \Delta W_{12} = nC_V(T_2 - T_1)$$
$$\Delta U_{23} = \Delta Q_{23} = nC_V(T_3 - T_2)$$
$$\Delta U_{34} = \Delta W_{34} = nC_V(T_4 - T_3)$$
$$\Delta U_{41} = \Delta Q_{41} = nC_V(T_1 - T_4)$$

c) $\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_4|}{\Delta Q_3} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$

$pV = nRT \Rightarrow \frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_4 p_4}{T_4}$; $V_1 = V_4 \Rightarrow T_1 = \frac{p_1}{p_4} T_4$

$T_2 = \frac{p_2}{p_3} T_3$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_3\left(\frac{p_2}{p_3} - 1\right)}{T_4\left(\frac{p_1}{p_4} - 1\right)} = 1 - \frac{T_3}{T_4} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_2 - p_3}{p_1 - p_4}$

$$\eta = \frac{|W_{34} + W_{12}|}{\Delta Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_1}$$

Equations for adiabatic processes yield:

$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$ $\quad p_3 = p_4 \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma \Rightarrow$ with $V_4 = V_1$, $V_2 = V_3$, $k := \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$:

$\Rightarrow p_2 = k p_1$; $p_3 = k p_4 \Rightarrow p_2 - p_3 = kp_1 - kp_4 = k(p_1 - p_4)$

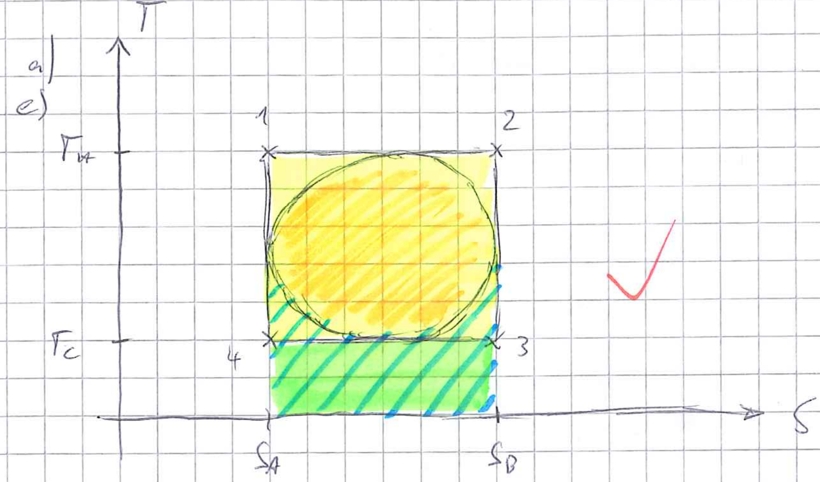
$\Rightarrow \frac{p_2 - p_3}{p_1 - p_4} = k$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_3}{T_4} \cdot \frac{p_4}{p_3} \cdot k = 1 - \frac{T_3}{T_4} \cdot \frac{p_4}{p_3} \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^\gamma$

Adiabatic equation: $pV^\gamma = \text{const}$

$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_3}{T_4}$

2.2 a)
e)



b) $$Q_{12} = \int_{①}^{②} dQ = \int_{S_A}^{S_B} T_H \, dS = T_H S \Big|_{S_A}^{S_B} = S_B T_H - S_A T_H = T_H (S_B - S_A)$$ ✓

c) ~~Q_{34}~~ is calculated likewise

$$\Rightarrow Q_{34} = \int_{S_B}^{S_A} T_C \, dS = T_C (S_A - S_B)$$ ✓

d) $$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} = \frac{T_H (S_B - S_A) - T_C (S_B - S_A)}{T_H (S_B - S_A)} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \text{as in lecture}$$ ✓

The efficiency is equal to the area inside the circular process minus the area below the circ. proc. divided by the inside area. This works for all circular processes.
The difference in entropy doesn't play a role because it is the same for both heat changes. ✓

f) The efficiency of the oval process is the orange area plus the blue area div. by the blue area.

Obviously, the largest quotient is obtained when the areas are rectangular ✓

2.3 Probability approach (as in lecture):

$p_A(V_A)$ = probability to meet one A-particle in V_A

$P_A(V_A)$ = prob. to meet all A particles in $V_A = p_A(V_A)^{N_A}$

$p_A(V_A)$ before the change $= 1$

$p_A(V_A)$ after — " — $=$ ~~[illegible]~~ $\left(\frac{V_A}{V_A+V_B}\right)$ for topological reasons

$$P_A(V_A) = \left(\frac{V_A}{V_A+V_B}\right)^{N_A}$$

$$\Rightarrow \Delta S_A = k_B N_A \ln\left(\frac{V_A+V_B}{V_A}\right)$$ (formula fell down from heaven in the lecture)

ΔS_B is calculated likewise $\Rightarrow \Delta S_B = k_B \cdot N_B \cdot \ln\left(\frac{V_A+V_B}{V_B}\right)$

$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B$ (entropies are additive) ✓

No final solution given. correct approach.

2.4. a) $$\frac{dT(x,t)}{dt} = -\frac{1}{A\varrho c}\frac{dj_Q}{dx}$$

$$j_Q = -\lambda A \frac{dT(x,t)}{dx}$$

$$\frac{dj_Q}{dx} = -\lambda A \frac{d^2T(x,t)}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dT(x,t)}{dt} = +\frac{1}{A\varrho c}\lambda \frac{d^2T(x,t)}{dx^2} = \frac{\lambda}{\varrho c}\frac{d^2T(x,t)}{dx^2}$$

✓

$$= a\frac{d^2T(x,t)}{dx^2} \quad \boxed{}$$

b) $$T(x,t) = T_0 + Ct^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4at}} \qquad -\frac{x^2}{4at} =: D$$

$$\frac{d}{dt}T(x,t) = -\frac{1}{2t}Ct^{-1/2}e^D + Ct^{-1/2}e^D \cdot \frac{x^2}{4at^2}$$ ✓

$$\frac{d}{dx}T(x,t) =: T'(x,t) = Ct^{-1/2}e^D \cdot -\frac{2x}{4at} = -\frac{1}{2at}x\,Ct^{-1/2}e^D$$ ✓ (1)

$$\frac{d^2}{dx^2}T(x,t) = \frac{d}{dt}T'(x,t) = -\frac{1}{2at}Ct^{-1/2}e^D + \left(-\frac{1}{2at}x\,Ct^{-1/2}e^D\cdot\left(-\frac{2x}{4at}\right)\right)$$

(1) must be equal to (2) $$= -\frac{1}{2at}Ct^{-1/2}e^D + \frac{1}{4a^2t^2}x^2Ct^{-1/2}e^D$$ (2)

This shows that the given function is the solution of the dif. equation.

→ Plug these in the diff. equation

✓

$$-\frac{1}{2t}Ct^{-1/2}e^D + Ct^{-1/2}\frac{x^2}{4at^2}e^D = a\left(-\frac{1}{2at}Ct^{-1/2}e^D + \frac{1}{4a^2t^2}x^2Ct^{-1/2}e^D\right)$$

$\boxed{}$

c) $$70\,K = Ct^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4at}} \quad \text{with } t = 60\,s \text{ and } x = 0$$

$$\Leftrightarrow 70\,K = Ct^{-1/2} = \frac{Q}{c\varrho A\sqrt{4\pi\frac{\lambda}{c\varrho}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{60\,s}}$$

$$\Rightarrow Q = 70\,K\,c\varrho A\sqrt{4\pi\frac{\lambda}{c\varrho}}\sqrt{60\,s}$$

$$= 70\,K\cdot 383\,\frac{J}{kg\,K}\cdot 8.96\cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3}\cdot 0.25\,cm^2$$

$$\cdot\sqrt{4\pi\, 384\,\frac{W}{mK}\cdot\frac{1}{383\,\frac{J}{kgK}}\cdot\frac{1}{8.96\cdot10^3\,\frac{kg}{m^3}}\cdot 60\,s}$$

✓ Wolfram Alpha

$= 1744\,J \approx 0.42 \times$ the energy released by explosion of one gram TNT

d) $$\frac{d}{dt}\Delta T(x,t) = 0 \text{ at } x = 10\,cm \Rightarrow \frac{1}{2t}Ct^{-1/2}e^D = \frac{x^2}{4at^2}Ct^{-1/2}e^D$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4at} \Rightarrow t = \frac{x^2}{2a} = 44.68\,s$$

your function is ΔT not T.

$$T\left(x, \frac{x^2}{2a}\right) - T_0 = C\frac{\sqrt{2a}}{x}\cdot\exp\left(\frac{x^2}{4a\cdot\frac{x^2}{2a}}\right) = \frac{C}{x}\cdot\sqrt{2ae}$$

$$= \frac{1}{10cm} \cdot \frac{Q}{c \varrho A \sqrt{4\pi \frac{\lambda}{c\varrho}}} \cdot \sqrt{2\frac{\lambda}{c\varrho}} \cdot \sqrt{e}$$

$$= \frac{1}{10cm} \cdot \frac{Q}{c \varrho A} \cdot \sqrt{\frac{e}{2\pi}} = \frac{1}{10cm} \cdot \frac{1744\,J}{383\,J/kgK \cdot 8{,}96 \cdot 10^3\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}25cm^2} \cdot \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$$

Wolfram/Alpha
$$= \underline{\underline{420{,}1\,K}}$$

✓

From $\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow t = \frac{x^2}{2a} \rightsquigarrow t \simeq 45s.$