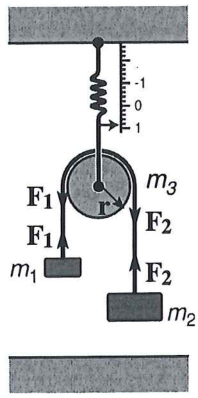
Name(n): Pia Malika RENZ, Jannis Andrija SCHNITZER Gruppe: 6 7 STRELTSOV Punkte: 8 | 4 | 5 | 8

9. Übungsblatt Experimentalphysik I WS 2011/2012

Abgabe: **15.-16. Dez 2011** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

9.1 Und wieder Atwoodsche Maschine (10 Punkte)



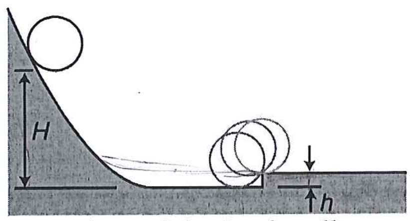
Zwei Massen $m_1 = 500\,\text{g}$ und $m_2 = 700\,\text{g}$ hängen auf einem masselosen Seil, das über eine Umlenkrolle der Masse $m_R = 200\,\text{g}$ überspannt ist. Die Umlenkrolle ist ein Vollzylinder des Radius r. Sie dreht sich zusammen mit dem laufenden Seil ohne zu rutschen. Bestimmen Sie die Beschleunigung a der Massen und die Zugkräfte F_1 und F_2.
Hinweis: $F_1 \neq F_2$. Überlegen Sie sich warum!

Zusatzfragen mit Extra-Punkten
a) (2 Bonuspunkte) Die Rolle hängt an einer Federwaage. Welches Gewicht F_F zeigt die Federwaage?
b) (3 Bonuspunkte) Bestimmen Sie den minimalen Reibungskoeffizienten μ zwischen dem Seil und der Rolle.

9.2 Billard-Kugel (10 Punkte)

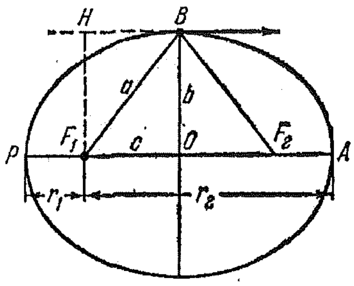
Sie stoßen eine Billard-Kugel gerade so mit ihrem Queue, dass diese zunächst mit einer Geschwindigkeit v_0 über den Tisch rutscht, ohne dabei zu rollen. Aufgrund der Reibung zwischen Kugel und Tisch versetzt sich die Kugel nach und nach in Rotation, bis sie schließlich mit einer konstanten Geschwindigkeit v_1 rollt ohne zu rutschen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1. Gehen Sie von einer massiven und homogenen Kugel aus und nehmen Sie an, dass beim Rutschen der Kugel eine Reibungskraft auftritt, dass die Kugel aber reibungsfrei rollen kann. Welche Erhaltungsgröße können Sie bei der Lösung verwenden und warum ist diese Größe hier erhalten?

9.3 Über eine Stufe rollen (10 Punkte)



Ein anfangs ruhendes dünnwandiges Rohr mit Radius R rolle aus einer Höhe H den unten dargestellten Abhang herab, ohne dabei zu rutschen. Im horizontalen Abschnitt des Weges trifft es auf eine Stufe der Höhe h. Ist $h < R$ und die Starthöhe H groß genug, so kann das Rohr die Stufe überwinden. Wir wollen im Folgenden etwas vereinfachend davon ausgehen, dass das Rohr die Stufe rollend überwindet, d.h., dass die Stufenkante, während das Rohr auf die Stufe rollt, nur eine Gerade auf der Rohroberfläche berührt und dies ständig. Aus welcher Höhe H_{min} muß das Rohr starten, um bei gegebenem h und R über die Stufe rollen zu können? Geben Sie bei Ihrer Lösung an, welche Erhaltungssätze Sie verwenden und warum diese in den einzelnen Situationen gelten. Ein guter Startpunkt für die Lösung ist die Berechnung des Gesamt-Drehimpulses vor dem Stoß um einen Punkt auf der Stufenkante.

9.4 Erdsatellit (10 Punkte)



Die Gesamtenergie eines Satelliten auf einer Erdumlaufbahn ist durch

$$E = \frac{mv_r^2}{2} + V(r) = \frac{mv_r^2}{2} - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (1)$$

gegeben mit der radialen Komponente v_r der Geschwindigkeit, dem Abstand r zur Erde, dem Drehimpuls L und der Masse m des Satelliten, und der Erdmasse M.

a) Skizzieren Sie die Funktion $V(r)$ und erklären Sie mit Hilfe der Graphik, bei welchen Energien E die Trajektorie finit (elliptisch) bzw. infinit (parabolisch oder hyperbolisch) ist. Für eine exemplarische finite Trajektorie markieren Sie in Ihrer Graphik die Abstände r_1 und r_2 im Perigäum und Apogäum.

b) Wie groß ist v_r im Apogäum und im Perigäum?

c) Ermitteln Sie die Abstände r_1 und r_2 im Perigäum und Apogäum aus der Gleichung (1) und bestimmen Sie daraus die große Halbachse a der Ellipse als Funktion von E, M und m.

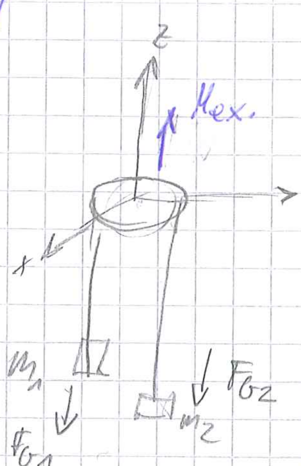
d) Ein Erdsatellit befindet sich auf einer Kreisbahn mit Radius r. Für ein Bremsmanöver wird für kurze Zeit ein Triebwerk eingeschaltet, der entlang der Flugrichtung wirkt. Dadurch verringert sich die Geschwindigkeit des Satelliten um den Faktor $\Delta v/v = 0,1$ ohne Änderung der Flugrichtung, und der Satellit wechselt auf eine elliptische Umlaufbahn. In welchem Punkt der elliptischen Umlaufbahn geschah der Bremsmanöver?

e) Finden Sie die Gesamtenergie E' des Satelliten nach dem Bremsmanöver als Funktion von M, m, r und $\Delta v/v$. Bestimmen Sie daraus die große Halbachse a der Ellipse als Funktion von r und $\Delta v/v$ mit dem Ergebnis aus dem Punkt c).
Hinweis: Dort, wo es sinnvoll ist, können Sie die Näherung $\Delta v/v \ll 1$ benutzen.

f) Finden Sie nun das Verhältnis b/a der Hauptachsen der neuen Umlaufbahn. Bestimmen Sie den Zahlenwert für b/a.

Experimentalphysik - Übungszettel

9.1



Choosing our coordinate system thus that the two masses and the pulley lie in the x-y plane and z stands orthogonal to the pulley and goes through the center of it.

=> 1-dimensional problem

$$\sum M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

The external torsional moment is the sum of all the torsional moments caused by external forces: F_G on to the role and the two masses and the normal force on to the attachment of the pulley.

$$\sum M_{ex,z} = \underset{(\text{from } F_N)}{M_N} + \underset{(\text{from } F_{G_R})}{M_R} + \underbrace{M_1 + M_2}_{(\text{from } F_G \text{ of the masses})}$$

applying law of the lever (r is lever)

$$\Rightarrow \sum M_{ex,z} = 0 + 0 + m_2 \cdot g \cdot r - m_1 \cdot g \cdot r$$

We've also got: $L_z = L_R + L_1 + L_2$

$$= I\omega + m_2 r v + m_1 r v$$

$$\Rightarrow \sum M_{ex_z} = \dot{L}_z$$

$$m_1 \cdot g \cdot r - m_2 \cdot g \cdot r = (I\omega + m_2 r v + m_1 r v)^{\cdot}$$

$$= I\alpha + (m_2 + m_1) r \cdot a$$

$$= (\tfrac{1}{2} m_R + m_2 + m_1) r \cdot a$$ +

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1) g}{\frac{1}{2}(m_R + m_1 + m_2)}$$, −1

8 points

$$= \frac{(0{,}7\,kg - 0{,}5\,kg) \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{\frac{1}{2}(0{,}5\,kg + 0{,}7\,kg + 0{,}24\,kg)} = 2{,}8\,\frac{m}{s}$$, −1

9.2 Ansatz: using conservation of energy

NO!!! friction

$$E_{kin}^0 = E_{rot}^1 + E_{kin}^1$$

This is possible because the friction only affects one small point on the sphere's surface, which causes a torque and thus a rotation.

Calculation:

$$E_{kin}^0 = E_{rot}^1 + E_{kin}^1$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m v_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} I \omega^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m v_1^2$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} \left(\tfrac{2}{5} m R^2\right) \cdot \left(\tfrac{v_1}{R}\right)^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m v_1^2$$

$$\cancel{m} v_0^2 = \tfrac{2}{5} \cancel{m} v_1^2 + \cancel{m} v_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0^2 = \tfrac{7}{5} v_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1 = \sqrt{\tfrac{5}{7}}\, v_0$$

4 points

9.3 Calculating translation speeds v_1 (before the step) and v_2 (after the step) using conservation of energy:

$$E_{pot}^0 = E_{kin}^1 + E_{rot}^1 = E_{kin}^2 + E_{rot}^2 + E_{pot}^2$$

$$m \cdot g \cdot H = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \frac{v_1^2}{R^2} = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + \tfrac{1}{2} m R^2 \frac{v_2^2}{R^2} + m \cdot g \cdot h$$

$$= m v_1^2 = m v_2^2 + mgh$$

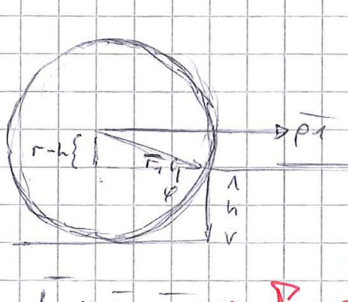
5 points

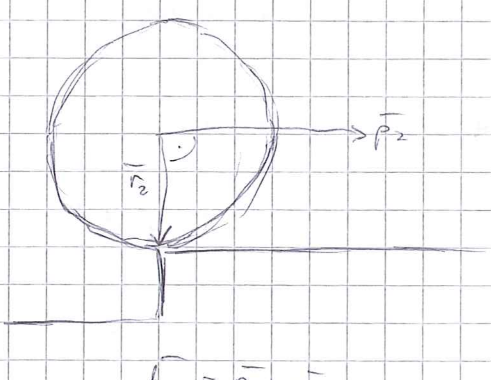
$$\Leftrightarrow \quad gH = v_1^2 = v_2^2 + gh$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{gH}} \quad v_2 = \sqrt{g(H-h)}$$

+

Considering angular momentum:





$\vec L_1 = \vec r_1 \times \vec p_1$ + $I\omega'$

$\vec L_2 = \vec r_2 \times \vec p_2$

additional consideration: $\sin\varphi = \frac{r-h}{r}$

$|L_2| = r \cdot m \cdot v_2$

$|L_1| = r \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin\varphi = (r-h)\, m\, v_1$ $+\, m r^2 \frac{v_1}{r}$

Using conservation of angular momentum:

$$|L_1| = |L_2|$$

$$\Rightarrow (r-h)\cdot \cancel{m} \cdot v_1 = r \cdot \cancel{m} \cdot v_2$$

Plugging in v_1 and v_2

$$\frac{(r-h)}{r} \cdot \sqrt{gH} = \sqrt{g(H-h)}$$

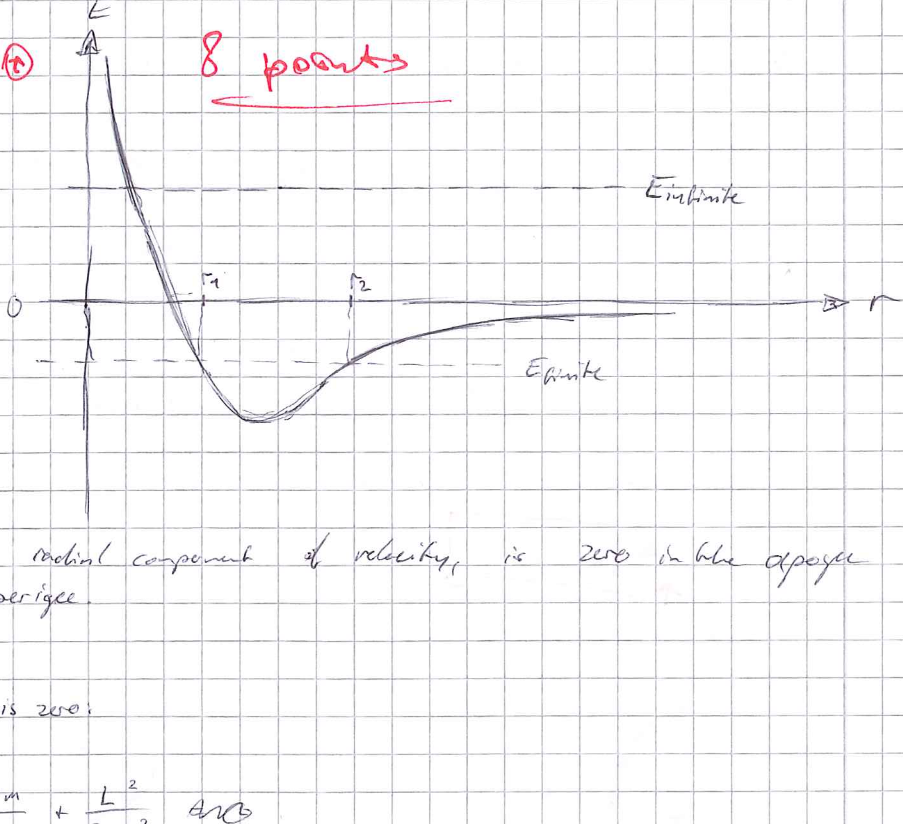
$$\left(\frac{r-h}{r}\right)^2 = \frac{H-h}{H}$$

$$= 1 - \frac{h}{H}$$

$$1 - \left(\frac{r-h}{r}\right)^2 = \frac{h}{H}$$

$$H_{min} = \frac{h}{1-\left(\frac{r-h}{r}\right)^2}$$

3.4: a) Sketch: + 8 points



+ b) v_r, the radial component of velocity, is zero in the apogee and the perigee.

+ c) When v_r is zero:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E + \frac{GMm}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} = 0$$

Substitution $u := \frac{1}{r}$

$$-\left(\frac{L^2}{2m}\right)u^2 + (GMm)\cdot u + E = 0 \Leftrightarrow u^2 - \frac{2GMm^2}{L^2}\cdot u - \frac{2mE}{L^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{GMm^2}{L^2} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2m^4}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{1}{\frac{GMm^2}{L^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2m^4 + 2mEL^2}{L^4}}}$$

$$= \frac{L^2}{GMm^2 + \sqrt{G^2M^2m^4 + 2mEL^2}}$$

$$r_2 = \cancel{\frac{L^2}{GMm^2 - \sqrt{G^2M^2m^4 + 2mEL^2}}} \frac{L^2}{GMm^2 - \sqrt{G^2M^2m^4 + 2mEL^2}}$$

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2}{GMm^2 + \sqrt{\ldots}} + \frac{L^2}{GMm^2 - \sqrt{\ldots}}\right)$$

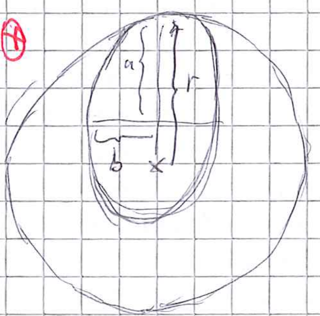
$$= \frac{1}{2}\,\frac{L^2(GMm^2 + \sqrt{\ldots} + GMm^2 - \sqrt{\ldots})}{(GMm^2 + \sqrt{\ldots})\cdot(GMm^2 - \sqrt{\ldots})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{L^2 \cdot 2GMm^2}{(GMm^2)^2 - \sqrt{\ldots}^2} = \frac{1}{2}\,\frac{L^2\, 2GMm^2}{G^2M^2m^4 \underbrace{- G^2M^2m^4 - 2mEL^2}_{\sqrt{\ldots}^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{L^2}\,\cancel{2}GMm^{\cancel{2}}}{-\cancel{2}\cancel{m}E\cancel{L^2}}$$

$$a = -\frac{GMm}{2E} \quad + \quad = -\frac{1}{2}GMm \cdot \frac{1}{E}$$

d) +



The braking manoeuvre happened in the apogee, because while the satellite is on a circular orbit $F_G = F_{cp}$ is the same in every point of the orbit. If the satellite somehow lowers its velocity, the force that accelerates it radially is still the same, so it will be deviated stronger than on the circular orbit.

e) Considering E' in the apogee:

$$E' = -\frac{GMm}{r} + \frac{(L')^2}{2mr^2}$$

$$L' = m \cdot r \cdot v' = m \cdot r \cdot v \cdot \left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right)$$

$$F_{cp} = F_G \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{GM \cdot \frac{1}{r}}$$

$$\Rightarrow E' = -\frac{GMm}{r} + \frac{m^2r^2v^2\left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right)^2}{2mr^2} = -\frac{GMm}{r} + \frac{m^2GMr\left(1 - \frac{\Delta v}{v}\right)^2}{2mr^2}$$

$$E' = \frac{\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \cdot m \cdot G \cdot M - 2 \cdot G \cdot M \cdot m}{2r}$$

$$= GMm \cdot \left(\frac{\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2 - 2}{2r} \right)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} GMm \cdot \frac{1}{E'}$$

plug

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{GMm} \cdot \frac{1}{\cancel{GMm}} \cdot \cancel{2}r \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2 - 2}$$

$$= -\frac{r}{\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2 - 2} = \frac{r}{2-\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2}$$

f) We know that $b = a \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}$ from ellipses' properties

$$\varepsilon = \frac{r-a}{a}$$

It follows that $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{r-a}{a}\right)^2}$

Plugging in values:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{r}\left(2-\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2\right) \cdot r \cdot \left(1-\frac{1}{2-\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(2-\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2-1\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(1-\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2\right)^2}$$

Plugging $\frac{\Delta v}{v} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1-\left(1-(0{,}9)^2\right)^2}$

$$= \sqrt{1-(1-0{,}81)^2}$$

$$= \sqrt{1-0{,}19^2}$$

$$\approx 0{,}9639$$