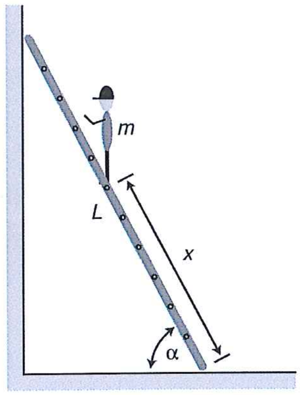
Name(n): Pia Malika RENZ
Jannis Andrija SCHNITZER
Gruppe: G7 STRELTSOV
Punkte: 10 | 4 | 7 | 10

8. Übungsblatt Experimentalphysik I WS 2011/2012

Abgabe: **8.-9. Dez 2011** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

8.1 Die Leiter (10 Punkte)

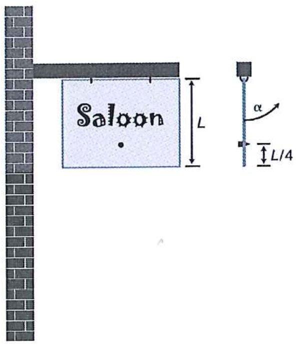
Eine Leiter der Masse M und Länge L stehe unter einem Winkel α an eine Wand gelehnt. Die Masse der Leiter sei homogen über deren Länge verteilt. Der Haftreibungskoeffizient am Boden sei μ. Der Kontakt zur Wand sei reibungsfrei. Im Abstand x vom Fußpunkt der Leiter stehe eine Person der Masse m auf der Leiter.



a) Tragen Sie die wirkenden Kräfte in eine Skizze ein und stellen Sie die Kräftebilanz in vertikaler und horizontaler Richtung auf. Wie sieht die Drehmomentbilanz aus?
b) Berechnen Sie den minimalen Anstellwinkel, bei dem die Leiter ohne Arbeiter nicht wegrutscht.
c) Bei welchem minimalen Winkel muß die Leiter aufgestellt werden, damit ein $m = 75\,\text{kg}$ schwerer Arbeiter bis zum Ende der Leiter hochsteigen kann, ohne dass die Leiter wegrutscht? Nehmen Sie hierbei $M = 25\,\text{kg}$, $L = 6\,\text{m}$ und $\mu = 0{,}5$ an.

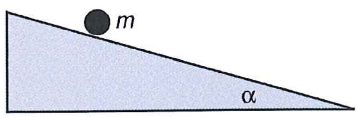
8.2 Der Saloon (10 Punkte)

Beim gestrigen Duell auf der Mainstreet hat der langsamere Cowboy auf das Schild vor dem Saloon geschossen. Die Revolver-Kugel der Masse $m = 5\,\text{g}$ traf das Schild horizontal mit einer Geschwindigkeit von $v = 400\,\text{m/s}$ und blieb darin stecken (siehe Abbildung). Das Schild ist $B = 50\,\text{cm}$ breit, $L = 40\,\text{cm}$ hoch und $d = 5\,\text{mm}$ dick. Es ist aus Aluminium gefertigt und entlang der oberen Kante aufgehängt. Die Dichte von Aluminium finden Sie z.B. auf www.webelements.com. Um welchen Winkel wurde das Schild nach dem Treffer maximal ausgelenkt? Vernachlässigen Sie hierbei die Luftreibung und die Reibung in der Aufhängung. Welche Erhaltungssätze können Sie hier anwenden (wann, warum)?



8.3 Rollender Zylinder (10 Punkte + 10 Extrapunkte)

Ein massiver Zylinder mit Masse m und Radius r rollt ohne zu rutschen auf einer schiefen Ebene mit Winkel α herunter.



a) (5 Punkte + 10 Extra) Welche Beschleunigung hat der Zylinder? Leiten Sie das Ergebnis selbst her und verwenden Sie keine Endergebnisse aus der Vorlesung. Skizzieren Sie alle Kräfte, die auf den Zylinder wirken.
Hinweis: Es gibt mindestens drei Lösungsansätze. Für jeden Ansatz gibt es bis zu 5 Punkte. Wenn Sie eine Lösung mit allen drei Ansätzen liefern, können Sie bis zu 15 Punkte für diesen Teil der Aufgabe bekommen.

1. Ansatz: Momentengleichung relativ zur momentanen Drehachse (auf der Ebene) und Steinerscher Satz.

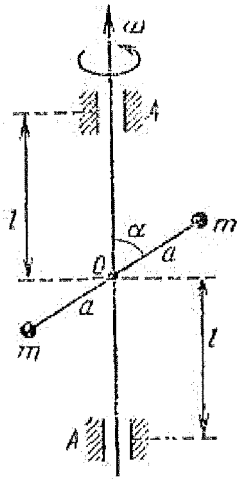
2. Ansatz: Momentengleichung relativ zur Achse durch den Schwerpunkt des Zylinders.

3. Ansatz: Energieerhaltungsatz. Erklären Sie, warum die mechanische Energie trotz der Reibung erhalten bleibt.

b) (5 Punkte) Welchen Wert muß der Haftreibungskoeffizient μ zwischen Zylinder und schiefer Ebene mindestens besitzen, damit der Zylinder rollt und nicht rutscht.

8.4 Rotierende Hantel (10 Punkte)

Zwei gleiche punktförmige Massen m rotieren um eine feste masselose Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (s. Bild). Die Massen sind miteinander durch eine masselose Stange verbunden, die einen Winkel α mit der Drehachse bildet. Die Stange und die Achse sind miteinander im Punkt O fest verbunden, und die Abstände a und l sind gegeben.



a) Mit Hilfe des Hebelgesetzes bestimmen Sie den Betrag $|\vec{F}|$ der Kraft, die auf die Achse in Achslagern A wirkt. In welcher Richtung wirkt die Kraft im oberen bzw. unterem Achslager?

b) Finden Sie den Drehimpuls $\vec{L}$ des Systems relativ zum Punkt O als Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und des Ortsvektors $\vec{a}$, der die Position der oberen Masse relativ zum Punkt O beschreibt. Benutzen Sie die Graßmann-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

für die Darstellung des Endergebnises. Skizzieren Sie den Vektor des Drehimpulses im Bild.

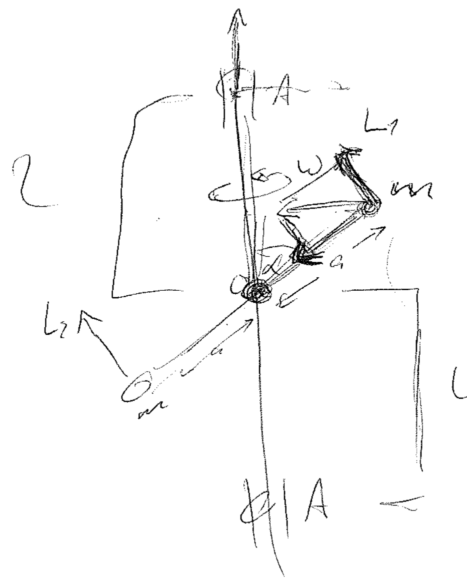
c) Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}$ in den Achslagern erneut, diesmal aus ihrem Drehmoment $\vec{M} = d\vec{L}/dt$. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\vec{F} = \pm \frac{m(\vec{\omega} \cdot \vec{a})[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{a}) - \vec{a}\omega^2]}{(l\omega)} .$$

Welches Vorzeichen gilt für das obere bzw. das untere Achslager?

$L \quad F$

$\dot{L} = r \times F$

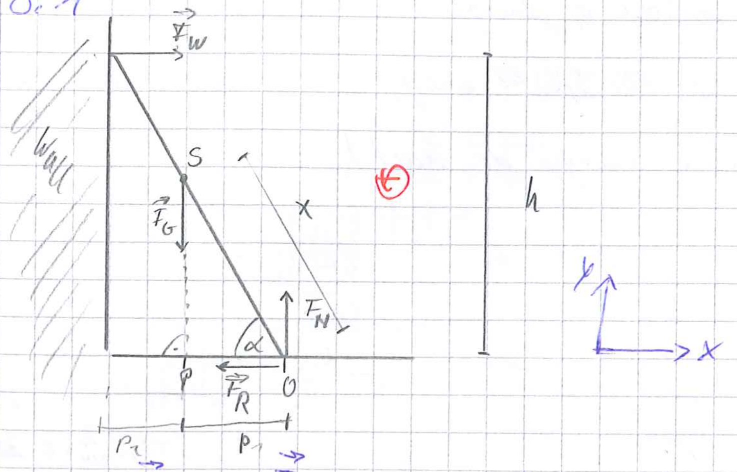


$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$- \sin^2\alpha$

Experimentalphysik – Übungsblatt 8

8.1



$y: \quad \vec F_N = -\vec F_G$

$x: \quad \vec F_R = -\vec F_W$

angular momentum:

$\vec F_W \cdot h = \vec F_G \cdot p$

$p = x \cdot \cos\alpha$

$\vec F_W = \mu \cdot \vec F_G$

$h = L \cdot \sin\alpha$

b)

$\cancel{\vec F_W \cdot h = \vec F_G \cdot p}$

$\cancel{\mu \cdot \vec F_G \ \pi .}$

$$F_W \cdot h = F_G \cdot \frac{1}{2} \overbrace{L \cos\alpha}^{p_1 + p_2}$$

$$\mu \cdot F_G \cdot L \cdot \sin\alpha = F_G \cdot \frac{L}{2} \cos\alpha$$

$$\mu \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\mu} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2\mu}\right)$$ +

≡ ?

c)

$m = 75\,kg, \quad M = 25\,kg, \quad L = 6\,m, \quad \mu = 0{,}5$

$$F_W \cdot h = F_G \cdot p_1 \cdot \cos\alpha$$

$$p_1 = \left(M \cdot \frac{L}{2} + mL\right) \cdot \frac{1}{M+m}$$

$$\mu \cdot F_G \cdot L \cdot \sin\alpha = F_G \cdot \frac{L\left(\frac{M}{2} + m\right)}{M+m} \cdot \cos\alpha$$

$$\mu \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)}{M+m}$$

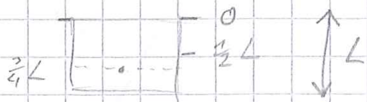
$$\tan\alpha = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)}{(M+m)\mu} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{\frac{M}{2} + m}{\mu(M+m)}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{25}{2}kg + 75\,kg}{0{,}5 \cdot 100\,kg}\right)$$

$$\approx 60{,}26°$$ +

8.2

At first: conservation of the angular momentum, it's not yet possible to apply conservation of energy (e.g. we don't know anything about the part of the kinetic energy of the bullet that is transformed into deformation energy or heat)



$$r_k \cdot p_k = r_s \cdot p_s$$

$$+ \quad \frac{3}{4} L \cdot m_k \cdot v_k = \frac{1}{2} L \cdot m_{ges} \cdot v'$$

$$v' = \frac{6}{4} \cdot \frac{m_k}{m_{ges}} \cdot v_k$$

$V = L \cdot B \cdot d$

$m_s = L \cdot B \cdot d \cdot \rho$

$\rho = 2{,}7 \frac{g}{cm^3} = 2700 \frac{kg}{m^3}$

$$= \frac{6}{4} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3} kg \cdot 400 \frac{m}{s}}{0{,}5 m \cdot 0{,}4 m \cdot 5 \cdot 10^{-3} m \cdot 2700 \frac{kg}{m^3}}$$

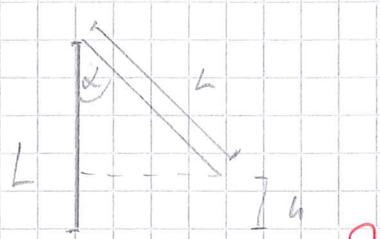
$$= 1{,}1 \frac{m}{s}$$

Having found out about v' the velocity of the sign after the shot we now use conservation of energy:

$$E_{kin} = E_{pot} \quad +$$

$$\frac{1}{2} m_{ges} v'^2 = m_{ges} \cdot g \cdot h$$

$$\frac{v'^2}{2g} = h$$



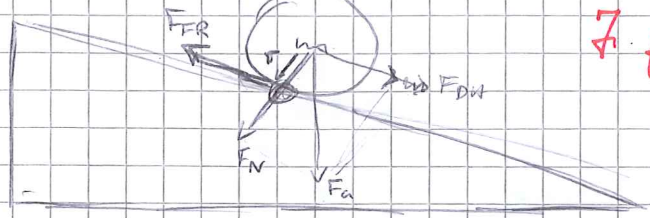
$h = L - L \sin\alpha$?

$$\frac{v'^2}{2g} = L - L \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = 1 - \frac{v'^2}{2gL}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 69{,}18°$$

8.3 a)



7 points

1. Ansatz: $M = -\vec{r} \times \vec{F}_{DH}$

$|M| = r \cdot F_G \cdot \sin\alpha = r \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$|M| = |I \dot{\omega}| \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{rmg\sin\alpha}{I}$

Steiner: $I = I_S + mr^2$; $I_S = \frac{1}{2} mr^2$

$\Rightarrow \alpha = \dot{\omega} r = \frac{\cancel{r^2}mg\sin\alpha}{\frac{1}{2}mr^2 + mr^2} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha$ 5 points

2. Ansatz: $M = \vec{r} \times \vec{F}_{FR}$ (friction)

$|M| = r \cdot \mu \cdot F_N = r \cdot \mu \cdot F_g \cdot \cos\alpha = r \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{r\mu mg\cos\alpha}{I_S} = 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \mu g\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \dot{\omega} r = 2\mu g\cos\alpha$

3. Ansatz: $dE_{rot} + dE_{kin} + dE_{pot} = 0$

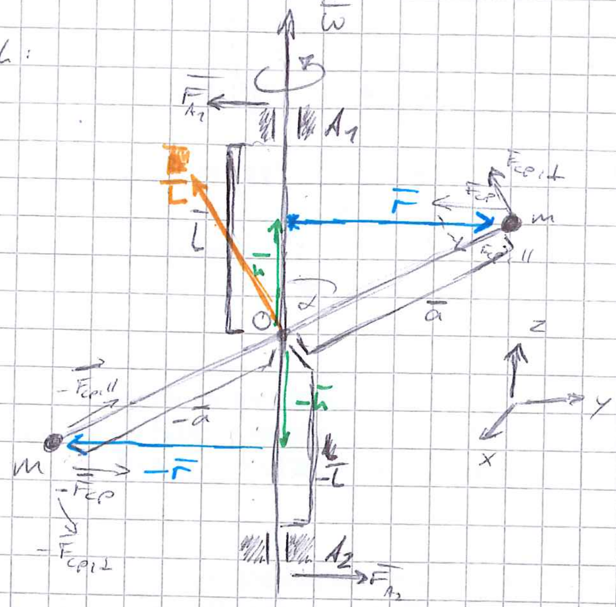
$\Leftrightarrow I\omega\dot{\omega} + mv\dot{v} + mg\dot{h} = 0$

I have no idea how to proceed; but I know that conservation of energy can be applied because the frictional force causes rotation instead of decelerating; ~~bc~~ because it always only acts on a little point and "causes it to rotate away", no energy gets lost in thermic energy (heat). f

b) μ must be such that $F_{Fr} > F_{DH} \Rightarrow \mu \cdot \cos\alpha \cdot F_G > \sin\alpha \cdot F_G$

$\Rightarrow \mu > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

8.4. Sketch:



a) Lever rule: $l\cdot|\vec F_{A_1}| = +a\cdot|\vec F_{cp,\perp}|$ $\qquad |\vec F_{cp,\perp}| = |\vec F_{cp}|\cdot\cos\alpha$

$+l\cdot|\vec F_{A_2}| = +a\cdot|\vec F_{cp,\perp}| \Rightarrow |\vec F| = |\vec F_{A_1}| = |\vec F_{A_2}|$

$$|\vec F| = +\frac{a}{l}\cdot|\vec F_{cp,\perp}| = +\frac{a}{l}\cdot F_{cp}\cdot\cos\alpha = +\frac{a}{l}\cdot m\cdot\omega^2\cdot r\cdot\cos\alpha$$

$$r = a\cdot\sin\alpha \Rightarrow |\vec F| = +a^2\cdot\frac{m}{l}\cdot\omega^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

In A_1, the force acts to the left; in A_2, it acts to the right. This is because of the components of F_{cp} perpendicular to the bar that connects the masses m; because of the bar's orientation, they form a force pair ~~causing a torque~~ which is equivalent to the force pair in A_1 and A_2.

b) $\vec\omega = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}$ $\quad \vec a = a\cdot\begin{pmatrix}\sin\alpha\cdot\cos\omega t\\ \sin\alpha\cdot\sin\omega t\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$; $|\vec a| = a$; $\vec a\cdot\vec\omega = a\omega\cos(\alpha)$

These can be obtained by geometric deliberation: rotation around the center axis means $\vec\omega$ ~~wash~~ can only have one component in z direction.
Because $\vec a$ is spinning (in a circle, obviously) around the axis, $r = a\cdot\sin\alpha$, $h = a\cdot\cos\alpha$, the above form for $\vec a$ makes sense.

$\vec L_1 = \vec r_1\times\vec p_1$ (angular momentum of top mass)

$\vec L_2 = \vec r_2\times\vec p_2$ (angular moment of bottom mass)

$\vec r_1 = \vec a$, $\vec p_1 = m\vec v = m(\vec\omega\times\vec r_1) = m(\vec\omega\times\vec a)$
$\vec r_2 = -\vec a$, $\vec p_2 = m\vec v_2 = m(\vec\omega\times\vec r_2) = m(\vec\omega\times -\vec a)$

$\Rightarrow \vec L_1 = \vec L_2 \qquad \vec L_{tot} = \vec L_1 + \vec L_2 = 2\vec L_1$

$$\vec L_1 = \vec a\times m(\vec\omega\times\vec a) \overset{\text{Grassmann}}{=} m\cdot\left[\vec\omega\cdot(a^2) - \vec a\cdot(\vec a\cdot\vec\omega)\right]$$

$$= m\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\a^2\omega\end{pmatrix} - a^2\begin{pmatrix}\sin\alpha\cos\alpha\,\omega\cos\omega t\\ \sin\alpha\cos\alpha\,\omega\sin\omega t\\ \cos^2\alpha\cdot\omega\end{pmatrix}\right]$$

$$= m \cdot \begin{pmatrix} -a^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\omega\,\cos(\omega t) \\ -a^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\omega\,\sin(\omega t) \\ a^2 \cdot \omega - a^2 \cos^2(\alpha) \cdot \omega \end{pmatrix}$$

$$\bar{L}_1 = -m \cdot a^2 \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(\omega t) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin(\omega t) \\ \cos^2(\alpha) - 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{L} = 2 \cdot \bar{L}_1$$

c) (Torque) $$\bar{M}_1 = \frac{d\bar{L}_1}{dt} = + m a^2 \omega^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

To prove: $\bar{M} \overset{!}{=} \bar{r} \times \bar{F}$; $\bar{r} = \pm \bar{l}$, $\bar{F} = \pm \frac{m(\bar{\omega}\cdot\bar{a})\left[\bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{a}) - \bar{a}\omega^2\right]}{(l\omega)}$

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \bar{l} \times \frac{m(\bar{\omega}\cdot\bar{a})\left[\bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{a}) - \bar{a}\omega^2\right]}{(l\omega)} \qquad \bar{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \frac{m}{l \cdot \omega} \cdot a \cdot \omega \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a\omega^2 \cos\alpha - a\omega^2 \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\cos(\omega t) \\ \sin(\alpha)\sin(\omega t) \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \frac{m}{l} \cdot a^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \omega^2 \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\cos(\omega t) \\ \sin(\alpha)\sin(\omega t) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right]}_{\sin(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \left(-\frac{m}{l} \cdot a^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\frac{m}{l} \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left[\bar{a} \times \bar{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -\frac{m}{l} \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} -l \cdot \sin(\omega t) \\ +l \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= + m \cdot a^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} +\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{M}_1 = \bar{M}_2 \ \square$$

$$\bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = -\bar{r}_1 \times -\bar{F}_1 = \bar{M}_2 = \bar{M}_1 \ \square$$

For $+\bar{r}$ $\bar{F}$ has to have a positive sign, too, in order to satisfy $\bar{M}_1$'s sign/direction. So $+\bar{F}$ acts on the top axle bearing (A_1), and vice versa.