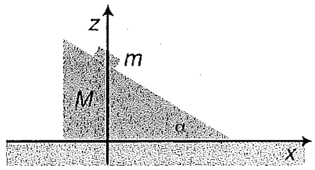
Name(n): Jannis Andrija Stutzer, Malika Reitz Gruppe: 67 Punkte: 5 | 8 | 4 | 8

5. Übungsblatt Experimentalphysik I WS 2011/2012

Abgabe: **17.-18. Nov 2011** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

5.1 Reibungsloser Keil (10 Punkte)

Ein kleiner Klotz mit Masse m rutsche, von der Schwerkraft getrieben, reibungsfrei auf einem Keil der Masse M, der sich reibungsfrei auf einem Tisch bewegen kann. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich die Anordnung in Ruhe, der Schwerpunkt des Klotzes sei in einer Höhe $z = h_0$ über der Tischoberfläche und die horizontale Position des Schwerpunkts sei $x = 0$. Auf welcher Bahn $(x(t), z(t))$ bewegt sich der Schwerpunkt der Klotzes, wenn die Anordnung bei $t = 0$ losgelassen wird?



Hinweis: Zumindest zwei Lösungswege sind möglich:
1. Die Impulserhaltung hilft, Beziehungen zwischen den Positionen von Klotz und Keil herzuleiten. Auch $z(x)$ kann berechnet werden. Die Energieerhaltung und ein bisschen Mathematik führen dann zum Ziel.
2. Alternative: Sie verzichten auf die Energieerhaltung und verwenden nur die auftretenden Kräfte. Achtung: Auch der Keil führt eine beschleunigte Bewegung durch, dies hat Folgen für die Normalkraft zwischen Klotz und Keil.

5.2 Bungee-Jumping (10 Punkte)

Eine $m = 60$ kg schwere Bungee-Springerin läst sich von einer $h = 35$ m hohen Brücke über einem Fluss fallen. An die Füße hat sie sich ein $L = 15$ m langes elastisches Bungeeseil gebunden, welches bei Anspannung dem Hookeschen Gesetz mit einer Federkonstanten $k = 160$ N/m gehorcht. Betrachten Sie die Bungee-Springerin als punktformig.

a) Welche Geschwindigkeit v_1 erreicht die Springerin in der Höhe, in der sich das Seil gerade zu spannen beginnt?

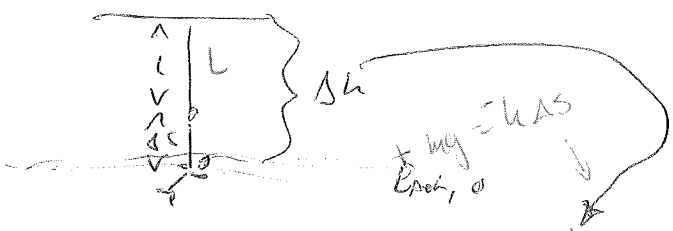
b) Welche maximale Tiefe h_{max}, von der Brücke aus betrachtet, erreicht die Springerin? Vergleichen Sie diese Tiefe mit derjenigen, die sie erreichen würde, wenn sie statisch am Seil hängen würde.

c) Zeichnen Sie in ein Höhen-Energie-Diagramm qualitativ den Verlauf der Energien ein, die vom Absprung bis zum ersten Erreichen des tiefsten Punktes auftreten.

d) Welche maximale Geschwindigkeit v_{max} erreicht die Springerin?

5.3 Karre mit Sand (10 Punkte)

Eine mit Sand beladene Karre wird mit einer konstanten Kraft F auf einer horizontalen Ebene gezogen. Durch ein Loch im Boden läuft der Sand mit einer konstanten Rate μ (g/s) aus der Karre aus. Finden Sie die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a der Karre als Funktion der Zeit t. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befand sich die Karre in Ruhe und hatte die Masse m_0, während die leere Karre die Masse $M < m_0$ hat.



$E_{rope} + E_{kin} = E_{pot,\,top}$

$$60kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \left(15m + \frac{981\frac{m}{s^2}}{160\frac{N}{m}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 60kg}{160\frac{N}{m}}\right)^2$$

588,6

8865,09 $-$ 6,77

8858,3

$= \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}}$$

285,277

5.4 Weltraumaufzug (10 Punkte)

Eine bestimmte Form eines sog. Weltraumlifts ist ein geostationärer Satellit, der aus einem langen Seil besteht, das direkt über dem Erdboden am Äquator beginnt, dann rechtwinklig gen Himmel reicht und sich mit der drehenden Erde mitbewegt. Ist das Seil kürzer als eine kritische Länge L, so fällt es aufgrund der Schwerkraft auf die Erde zurück, während die Schwerkraft nicht groß genug ist, um die nötige Zentripetalbeschleunigung aufzubringen, wenn es länger als L ist. Nehmen Sie an, dass das Seil frei über dem Erdboden hängt und konstante Massenbelegung hat. Vernachlässigen Sie Einflüsse durch die Erdatmosphäre (Wind, Regen etc.) und Gezeitenkräfte (Anziehungskräfte von Sonne, Mond etc.).

a) Berechnen Sie die Länge L des Seils, bei der der Satellit in stabiler Position über dem Erdboden schwebt als Funktion des Erdradius r_E, der Erdbeschleunigung g und der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ω. Berechnen Sie den Zahlenwert für L. Vergleichen Sie den Wert mit der Entfernung von der Erde zum Mond.

Hinweis: Betrachten Sie alle Kräfte, die auf ein infinitesimales Stück des Seils wirken. Berechnen Sie die gesamte auf das Seil wirkende *äußere* Kraft durch die Integration über die Seillänge. Überlegen Sie sich dabei, ob die inneren Zugkräfte im Seil die Bewegung des Schwerpunkts des Seils beeinflussen können! Bestimmen Sie außerdem durch eine Integration die gesamte resultierende Zentripetalkraft, die auf das Seil wirkt.

b) Die innerhalb des Seils wirkenden inneren Kräfte, die das Seil zusammenhalten, erzeugen Spannung im Seil. Die Spannung auf einer Höhe l entspricht der Gesamtkraft, die notwendig ist, damit der gesamte Abschnitt des Seils zwischen der Erdoberfläche und der Höhe l hängen bleibt. Zeichnen Sie die Spannung (in beliebigen Einheiten) als Funktion der Höhe l relativ zur Erdoberfläche. Finden Sie die Höhe l_1, wo die Spannung am stärksten ist.

I.1. Conservation of momentum gives

$$\vec{p}_{brick} = -\vec{p}_{wedge} \quad \text{(only in x-Direction)}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \dot{x}_{brick} = -M \cdot \dot{x}_{wedge}$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_{brick} = -\frac{M}{m} \dot{x}_{wedge} \quad \Leftrightarrow \dot{x}_{wedge} = -\frac{m}{M} \dot{x}_{brick}$$

Integration: $x_{brick} = -\frac{M}{m} x_{wedge} + c$; $c = 0$ because $x(0) = 0$

$$z(x) = -(x_b + x_w) \cdot \tan\alpha + h_0 \quad \text{(geometric consideration)}$$

Conservation of energy: (E_{pot} is the potential energy of the brick)

$$E_{pot,0} = E_{pot,t} + E_{kin,wedge,t} + E_{kin,brick,t}$$

$$m \cdot g \cdot h_0 = m \cdot g \cdot z(t) + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{x}_{wedge}^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{x}_{brick}^2 + \dot{z}_{brick}^2\right)$$

(~~from~~ with $|v_{brick}| = \sqrt{\dot{x}_{brick}^2 + \dot{z}_{brick}^2}$)

Plugging $z, \dot{z}$: $m \cdot g \cdot h_0 = -m \cdot g \cdot (x_b + x_w) + \frac{1}{2} M \dot{x}_w^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_b^2 - \left(\tan^2\alpha \, (\dot{x}_b + \dot{x}_w)\right)^2\right)$

Plugging $x_w = -\frac{m}{M} x_b$; $\dot{x}_w = -\frac{m}{M} \dot{x}_b$:

$$m \cdot g \cdot h_0 = -m \cdot g \overset{\tan\alpha}{\cdot} \left(x_b + \frac{m}{M} x_b\right) + \frac{1}{2} M \cdot \frac{m^2}{M^2} \dot{x}_b^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_b^2 - \left(\tan^2\alpha \left(\dot{x}_b - \frac{m}{M} \dot{x}_b\right)\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow g \cdot h_0 = -g \cdot \left(\frac{M-m}{M} x_b\right) + \frac{1}{2} \frac{m}{M} \dot{x}_b^2 + \frac{1}{2} \dot{x}_b^2 \cdot \left(1 - \tan^2\alpha \cdot \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow g \cdot h_0 = -g \overset{\tan\alpha}{\cdot} \frac{M-m}{M} x_b + \frac{1}{2} \dot{x}_b^2 \cdot \left(\frac{m}{M} + 1 - \tan^2(\alpha) \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{m}{M} + 1 - \tan^2\alpha \cdot \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right] \cdot \dot{x}_b^2 - g \overset{\tan\alpha}{\cdot} \frac{M-m}{M} x_b - g h_0 = 0$$

Setting $\frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} + 1 - \tan^2\alpha \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right) =: c_1$

$$-g \frac{M-m}{M} \tan\alpha =: c_2 \qquad -g \cdot h_0 =: c_3$$

Solution of differential equation $c_1 \dot{x}^2 + c_2 x + c_3 = 0$

is $x = \frac{1}{4 c_1 c_2} \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1} c_2^2 \cdot t - 4 c_1 c_3 + c_1 c_2^2 K_I + \cancel{\max} c_2^2 \cdot t^2\right)$

$$\cancel{\Rightarrow x = \frac{1}{-2\left(\frac{m}{M} + 1 - \tan^2\alpha \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right) \cdot g \cdot \frac{M-m}{M}} \left(\pm \left(\frac{m}{M} + 1 - \tan^2\alpha \left(\frac{M-m}{m}\right)^2\right) \cdot \sqrt{\ldots} \cdot g^2 \left(\frac{M-m}{M}\right)^2 \cdot t + g^2 \left(\frac{M-m}{M}\right)^2 t^2\right)}$$

From starting condition $x = 0$: $c_1 c_2^2 K_I = 4 c_1 c_3$

$$\Rightarrow K_I = \frac{4 c_1 c_3}{c_2^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4 c_1 c_2} \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1} c_2^2 \cdot t + c_2^2 \cdot t^2\right)$$

$$z(t) = \frac{M-m}{m} \cdot \tan\alpha \cdot x(t)$$

$$= -\frac{c_1}{g} \cdot x(t)$$

$$= -\frac{1}{4 \cdot c_2 \cdot g} \cdot \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1}\, c_2^2 t + c_2^2 t^2 \right)$$

$$= -\frac{c_2}{4g} \cdot \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1}\, t + t^2 \right)$$

$$x(t) = \frac{c_2}{4 c_1} \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1} \cdot t + t^2 \right)$$

$$r(t) = \frac{c_2}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \cdot \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1}\, t + t^2 \right) \\ -\frac{1}{g} \left(\pm 2 c_1 \sqrt{c_1}\, t + t^2 \right) \end{pmatrix}$$

with c_1, c_2 as defined above.

5.3: Known values $F = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$

4 points

$$m(t) = m_0 - \mu \cdot t \quad \text{for} \quad m(t) \geq M \iff t \leq \frac{m_0 - M}{\mu}$$

$$F = m(t) \cdot a(t) = m_0 a(t) - \mu t a(t)$$

$$\frac{d}{dt} F = 0 \Rightarrow m_0 \cdot \dot{a}(t) - \mu \cdot a(t) - \mu t \dot{a}(t)$$

$$\iff (m_0 - \mu t) \cdot \dot{a}(t) = \mu \cdot a(t)$$

Solution of differential equation: $a(t) = c \cdot (m_0 - \mu t)$

$$\iff a(t) = c \cdot m_0 + c \cdot \mu \cdot t$$

$$F = a(T) \cdot M = (c \cdot m_0 + c \cdot \mu \cdot T) \cdot M$$

(T is $\frac{m_0 - M}{\mu}$)

$$= c \cdot m_0 \cdot M + c \cdot \mu \cdot T \cdot M$$

$$\Rightarrow c = \frac{F}{m_0 \cdot M + \mu \cdot M \cdot T}$$

$$= \frac{F}{M} \cdot \frac{1}{m_0 + \mu T} = \frac{F}{M^2} \quad \Rightarrow a(t) = \frac{F}{M^2} (m_0 - \mu t)$$

$v(t)$: $v = \int a(t)\, dt = c \cdot m_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \mu \cdot t^2 + v_0$

$$v_0 = 0, \quad c = \frac{F}{M^2} \Rightarrow v(t) = \frac{F}{M^2} \left(m_0 t + \frac{1}{2} \mu t^2 \right)$$

Ex - Übungszettel 5

5.2 a) ⊕

$m = 60\,kg$, $h_0 = 35\,m$, $L = 15\,m$, $k = 160\,\frac{N}{m}$

$v_1 = a \cdot \Delta t$ with $\Delta t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

$= a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}}$

$= 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 15\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$

$\approx 17{,}16\,\frac{m}{s}$

b) ⊕

h_{max} is reached when E_{rope} is at its maximum. $E_{rope} = E_r = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta s)^2$

$\Rightarrow \quad E_{pot,max} = E_{r,max}$

$m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2$ with $\Delta s = h_{max} - L$

$m \cdot g\, h_{max} = \frac{k}{2} (h_{max} - L)$

$\Rightarrow h_{max}^2 - (2L + \frac{2mg}{k}) h_{max} + L^2 = 0$

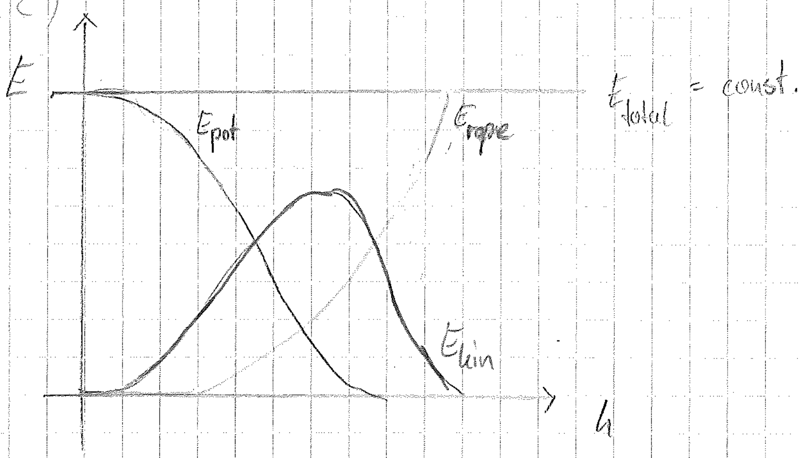
$x_1 \approx 7{,}55\,m$ (solution not to be considered in this case)

$x_2 \approx 29{,}81\,m$

The bungee jumper drops no more than 29,81 m which is far more than the way she would lengthen the rope if she ~~on~~ hung on to it without a velocity which is:

$L + \Delta s = L + \frac{F}{k} = 15\,m + \frac{60\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{160\,\frac{N}{m}} = 3{,}68\,m$

c)



d)

v_{max} is reached when E_{kin} is at its maximum, which means when the forces are at an equilibrium:

$$\cancel{F_{pot} = F_{rope} = F_{kin}}$$

$$\cancel{mg = k\,\Delta s = F_{kin}} \qquad \Rightarrow \Delta s = \frac{mg}{k}$$

$$mg = |k|\,\Delta s \qquad \Rightarrow \cancel{F_{kin} =}$$

$$\Delta s = \frac{mg}{k}$$

$$E_{rope} + E_{kin} = E_{pot,\Delta h}$$

$$E_{kin} = E_{pot,h} - E_{rope} \qquad \text{with } \Delta h = L + \Delta s$$

$$= mg \cdot \Delta h - \frac{1}{2} \cancel{k}\, k\, (\Delta s)^2$$

$$= m \cdot g \cdot \left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2 E_{kin}}{m}}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\left[mg\left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2\right]}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(60\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\left(15\,m + \frac{60\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{160\,\frac{N}{m}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{60\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{160\,\frac{N}{m}}\right)^2\right)}{60\,kg}}$$

$$\approx 17{,}2\,\frac{m}{s}$$

Nr. 4   8 points

a)

M: mass of earth (considered as perfectly symmetric ball)

r ~~R~~: radius of earth

ω: velocity of earth rotation

For a rope with the constant mass of per length of $u = Q \cdot \rho$ (ρ: density)

Every small piece of the rope carries the weight

$$\underbrace{dW}_{\text{weight}} = u \cdot \underbrace{\left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \right)}_{F_G - F_{zp}} dr$$

(+)

which must be constant, because we need an equilibrium of those two to prevent the „elevator" from collapsing / flying away

With the length L of the rope the total „mass" is

$$W = u \cdot \int_r^{r+L} \left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \right) dr \equiv u \left(\phi(r) - \phi(r+L) \right)$$

with $\phi(r)$ being the function for the effective potential:

$$\phi(r) = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

An equilibrium is reached if ~~the forces~~ the forces are directed in a way that the pull on the mass „vanishes" (same amount, opposite directions)

So it's $\quad \phi(r) = \phi(r+L)$

not considering $L = 0$ as a solution

$$\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \frac{GM}{(r+L)} + \frac{1}{2}\omega^2 (r+L)^2$$

$$\frac{2GM}{r\omega^2} + \cancel{r^2} = \frac{GM}{r+L} + \cancel{r^2} + 2rL - L^2$$

$\vdots$

of almost no effect.

$$L = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8GM}{\omega^2 r^2}} - 3 \right) \quad (r)$$

with $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$, $M = 5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg$

$$L = \frac{\cancel{6378\,km}\ \cancel{10^3\,m}}{2} \cdot 1000 \left(\sqrt{1 + \frac{8 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg}{(7{,}292 \cdot 10^{-5}\,\frac{rad}{s})^2 \cdot (6378\,000\,m)^2}} - 3 \right)$$

$L \approx$ ~~144.3~~ 143 836 km (+)

where is b) —?