IV

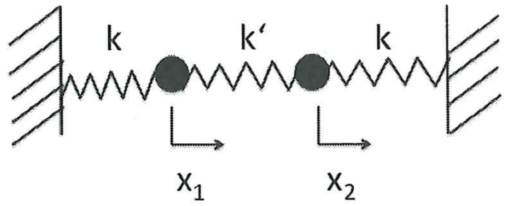
Name(n): Malika RENZ, Jannis Andrija SCHNITZER, Alexej STRELTSOV Gruppe: G7 Punkte: 10 | 7 | 10 | 8

11. Übungsblatt Experimentalphysik I WS 2011/2012

Abgabe: **13. Jan 2012** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

11.1 Gekoppelte Schwingungen (10 Punkte)

Gegeben sei das abgebildete gekoppelte Pendel bestehend aus zwei Massen m und Federn mit den Federkonstanten k und k'. Die Massen können sich reibungsfrei entlang der Federnrichtung bewegen. x_1 und x_2 bezeichnen die Auslenkungen der Massen in ihren jeweiligen Koordinatensystemen. Für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ sind die drei Federn entspannt.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Sie erhalten ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem.

b) Entkoppeln Sie dieses Differentialgleichungssystem durch eine geschickte Variablentransformation.

c) Wählen Sie einen geeigneten Ansatz (Sie müssen nicht über komplexe Exponentialfunktionen gehen. Sie können direkt einen sinnvollen reellen Ansatz wählen.) und lösen Sie das Differentialgleichungssystem. Verwenden Sie die Anfangsbedingungen $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x_1}(0) = 0$ und $\dot{x_2}(0) = 0$. Bringen Sie die Gleichungen in eine Form, so dass Sie das Produkt zweier trigonometrischer Funktionen erhalten. Verwenden Sie hierzu folgende Identität:

$$\cos(a) + cos(b) = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2) \tag{1}$$

bzw.

$$\cos(a) - cos(b) = -2\sin((a+b)/2)\sin((a-b)/2) \tag{2}$$

d) Skizzieren Sie die zeitlichen Verläufe für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ über einen geeignet langen Zeitraum. Nehmen Sie hierzu an $k' << k$. Wie nennt sich das Phänomen, dass Sie hier beobachten?

e) Nehmen Sie an, dass die Kopplung schwach ist, d.h. $k' << k$. Diskutieren Sie die Energiebilanz qualitativ. Mit welcher Frequenz "wechselt"die Energie zwischen beiden Seiten im Vergleich zur Schwebungsfreuenz? q

11.2 Getriebene gedämpfte harmonische Schwingung (10 Punkte)

Gegeben Sei folgende Differentialgleichung.

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f e^{i\Omega t}$$

Der Realteil der Differentialgleichung beschreibt einen getriebenen harmonischen Oszillator mit geschwindigkeitsabhängiger Dämpfung.

a) Überlegen Sie sich einen physikalischen Aufbau, der durch den Realteil dieser Differentialgleichung beschrieben wird und identifizieren Sie die einzelnen Komponenten Ihres Aufbaus mit den Termen in der Gleichung.

b) In Ihrer Mathematikvorlesung lernen Sie, dass Sie die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung erhalten, wenn Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung addieren.

Lösen Sie die homogene Gleichung (d.h. $f = 0$). Sie dürfen Endergebnisse vom letzten Übungszettel verwenden.

c) Zeigen Sie, dass der Ansatz $z(t) = z_0 e^{i\Omega t}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung liefert. Bestimmen Sie z_0 als Funktion von γ, ω_0, Ω und f.

d) z_0 kann in der Form $z_0 = |z_0|e^{i\Phi}$ geschrieben werden. Bestimmen Sie $|z_0|$ und Φ und skizzieren Sie beide als Funktion von Ω für verschiedene Werte von $Q = \omega_0/\gamma(1, 3, 10, 30)$. Q wird als Güte bezeichnet. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

11.3 Ballon (10 Punkte)

In welcher Höhe h der Erdatmosphäre schwebt ein Ballon, wenn seine Masse m_B und sein Volumen V_B betragen und die Temperatur konstant angenommen wird? Das Volumen V_B sei ebenfalls konstant. Berechnen Sie die Gleichgewichtshöhe h zunächst allgemein, dann für die Werte $m_B = 10\,\mathrm{kg}$, $V_B = 10\,\mathrm{m}^3$. Die Dichte von Luft auf Meeresspiegelhöhe beträgt $\rho_0 = 1.24\,\mathrm{kg/m^3}$ bei einem Normaldruck von $p_0 = 1013\,\mathrm{mbar}$. Handelt es sich um ein stabiles Gleichgewicht?

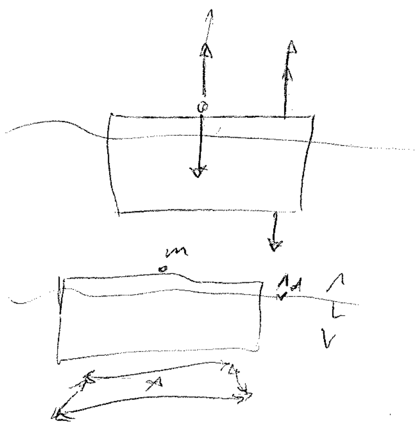
11.4 Der Weihnachtsmann macht Siesta (10 Punkte)

Der Weihnachtsmann muss aufgrund akuter Überarbeitung eine Pause einlegen und sucht sich dafür eine lauschige Eisscholle im Nordpolarmeer. Die Eisscholle hat eine Fläche von $A = 100\,\mathrm{m}^2$. Der Weihnachtsmann hat inklusive Schlitten und Rentiere eine Masse von $m = 10000\,\mathrm{kg}$ (viele Iphones). Nachdem er sein Gefährt geparkt hat, stellt er fest, dass die Eisscholle noch genau $s = 0,1\,\mathrm{m}$ aus dem Wasser ragt.

a) Wie gross ist die Dicke l der Eisscholle? Notwendige Materialkonstanten können Sie der Literatur entnehmen.

b) Mit welcher Höhe s' ragte die Eisscholle aus dem Wasser, bevor der Weihnachtsmann dort halt machte?

c) Welche Arbeit müssen die Rentiere verrichten, um mit dem Schlitten von der Eisscholle abzuheben? Stellen Sie sich vereinfacht vor, dass der Schlitten an einem Kran befestigt wird und dieser senkrecht nach oben zieht, bis der Schlitten keinen Kontakt mehr mit der Eisscholle hat.



$V_{ice} = b \cdot A$

$V_{ice\,inWater} = (b - d) \cdot A$

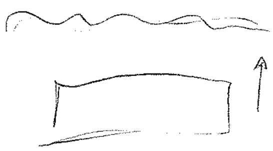
$V_{ice\,inWater} \cdot S_{water} \cdot g = V_{ice}\, S_{ice}\, g + mg$

$\dfrac{0{,}1m \cdot 100m^2 \cdot \frac{1kg}{(0{,}1m)^3} \cdot 2 + 10\,000\,kg}{100m^2 \cdot 83{,}13 \frac{kg}{m^3}}$

$V_{ice\,w} S_{water}\, g = V_{ice} S_{ice}\, g + mg$

$(b - d) A S_w g = b A S_i g + mg$

$l A S_w \cancel{g} - dAS_w \cancel{g} = lAS_i \cancel{g} + m\cancel{g}$



$\cancel{V_{ice} \cdot S_{water} \cdot g} - \cancel{V_{ice}} \cdot S_{ice} \cdot g$

$lAS_w g - lAS_i g = dAS_w + m$

$\dfrac{1000m \cdot \frac{1kg}{0{,}1m \cdot 0{,}1m} + 10\,000\,kg}{100 \cdot 83{,}13\,kg}\ m$

$V_{ice} \cdot S_{water} \cdot g - V_{ice} \cdot S_{ice} \cdot g = F$

$V_{ice} \cdot g\, (S_{water} - S_{ice}) = F$

$= \dfrac{20\,000}{8313}\ m = 2{,}405\ m$

$lA\,(S_w - S_i) = dAS_w + m$

$l = \dfrac{dAS_w + m}{A(S_w - S_i)}$

Experimental physics I, exercise sheet 11.

11.1: (a) $\ddot{x}_1 + \omega_k^2 x_1 = -\omega_{k'}^2 (x_1 - x_2)$ (I)

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_{k'} = \sqrt{\frac{k'}{m}}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_k^2 x_2 = -\omega_{k'}^2 (x_2 - x_1) \quad (II)$$

(b) Let $\xi := x_1 + x_2$
$\eta := x_1 - x_2$

(I) + (II): $(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_k^2 (x_1 + x_2) = -\omega_{k'}^2 (x_1 - x_2 + x_2 \overset{\text{minus}}{+} x_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\xi} + \omega_k^2 \xi = 0$$

(I) − (II): $(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_k^2 (x_1 - x_2) = -\omega_{k'}^2 (x_1 - x_2 - x_2 + x_1) = -2\omega_{k'}^2 (x_1 - x_2)$

$$\Leftrightarrow \ddot{\eta} + \omega_k^2 \eta = -2\omega_{k'}^2 \eta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\eta} + (\omega_k^2 + 2\omega_{k'}^2)\eta = 0$$

(c) Solutions:

$$\xi(t) = \hat{\xi} \cos(\omega_k t + \varphi_\xi) = \hat{\xi} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_\xi\right)$$

$$\eta(t) = \hat{\eta} \cos\left(\sqrt{\omega_k^2 - 2\omega_{k'}^2}\, t + \varphi_\eta\right) = \hat{\eta} \cos\left(\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}\, t + \varphi_\eta\right)$$

Initial conditions ⇝ $x_1(0) = a \quad x_2(0) = 0$
$\dot{x}_1(0) = 0 \quad \dot{x}_2(0) = 0$

$$\Rightarrow \xi(t) = a \cos(\omega_k t)$$
$$\eta(t) = a \cos(\omega_\eta t) \qquad \text{with } \omega_\eta := \sqrt{\omega_k^2 - 2\omega_{k'}^2}$$

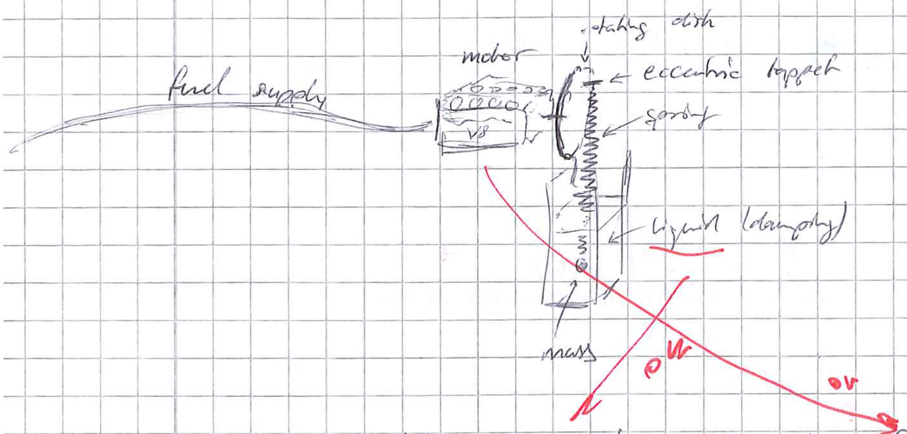
$$x_1 = \frac{\xi + \eta}{2} = a \cdot \cos\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2} t\right)$$

$$x_2 = \frac{\xi - \eta}{2} = -a \sin\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2} t\right)$$

(d) see extra sheet. The phenomenon is called beat ("Schwebung")

(e) From the graph is visible that the frequency with which the energy oscillates is twice the beat frequency.

11.2 (a) imagine a construction like this:



$$\underbrace{\ddot z(t)}_{\text{acceleration of mass due to total forces}} + \underbrace{2\gamma \dot z(t)}_{\text{damping by friction of liquid}} + \underbrace{\omega_0^2 z(t)}_{\text{repelling force due to spring}} = \underbrace{f e^{i\Omega t}}_{\text{acceleration due to motor rotation}}$$

(b) $\ddot z(t) + 2\gamma \dot z(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$

Ansatz: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow -\omega^2 z_0 e^{i\omega t} + 2\gamma i\omega z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 - 2\gamma i\omega - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Two independent solutions $\Rightarrow$ $z(t) = \cancel{z_0 e^{i\gamma t}}$
$= z_0 e^{-\gamma t} \cdot e^{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\, t} + z_0' e^{-\gamma t} \cdot e^{-\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\, t}$

(c) Plugging: $z_0 \Omega^2 e^{i\Omega t} + 2\gamma i\Omega z_0 e^{i\Omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t}$

$$z_0 = \frac{f}{\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2} \cdot \frac{\Omega^2 - 2\gamma i\Omega + \omega_0^2}{\Omega^2 - 2\gamma i\Omega + \omega_0^2}$$

$$= \frac{f}{(\Omega^2+\omega_0^2)^2 - 4\gamma^2\Omega^2} \cdot \left((\Omega^2+\omega_0^2) - i2\gamma\Omega\right)$$ +

(d) Let $a := (\Omega^2 + \omega_0^2)$ $b := 2\gamma\Omega$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{f}{a^2+b^2}(a - ib) = \frac{fa}{a^2-b^2} - i\frac{fb}{a^2-b^2}$$

minus

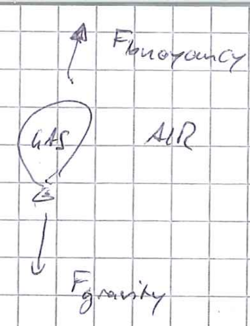
$$|z_0| = \sqrt{z_0 \cdot \bar z_0} = \sqrt{\frac{f^2a^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{f^2b^2}{(a^2-b^2)^2}} = \frac{f}{a^2-b^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$z_0 = |z_0| e^{i\phi} \Rightarrow \cancel{\frac{f}{a^2-b^2}}(a - ib) = \cancel{\frac{f}{a^2-b^2}}\sqrt{a^2+b^2}\, e^{i\phi}$$

$$a - ib = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{i\phi} \qquad \frac{a-ib}{\sqrt{a^2+b^2}} = e^{i\phi}$$

$$i\phi = \ln(a - ib) \cdot \frac{1}{\ln(\sqrt{a^2+b^2})} \Rightarrow \phi = -i\ln(a-ib) \cdot \frac{-i}{\ln(\sqrt{a^2+b^2})}$$

11.3 Sketch



$$F_{buoy} = V_{balloon} \cdot \rho_{air} \cdot g \quad (\text{Archimedes})$$

$$F_{grav} = m_{balloon} \cdot g = V_{balloon} \cdot \rho_{balloon} \cdot g \qquad \rho_{balloon} = \frac{M_{balloon}}{V_{balloon}}$$

$$\rho_{air} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{V_b} \cdot \rho_{air} \cdot \cancel{g} = \cancel{V_b} \cdot \rho_b \cdot \cancel{g}$$

$$\rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h} = \rho_b$$

$$-\frac{\rho_0}{p_0} g h = \ln \frac{\rho_b}{\rho_0} \qquad (\text{with } -g = +|g|)$$

$$h = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{|g|} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{balloon}}{\rho_0}\right)$$

Values: $h = \frac{1013 \text{ mbar}}{1{,}24 \frac{kg}{m^3}} \cdot \frac{1}{9{,}81 \frac{m}{s^2}} \cdot \ln\left(\frac{1 \frac{kg}{m^3}}{1{,}24 \frac{kg}{m^3}}\right)$

$= 1792 \text{ m}$ +

The equilibrium is stable because when $\rho_b > \rho_{air}$ it sinks and when $\rho_b < \rho_{air}$ it raises and ~~ρ_{air}~~ becomes smaller the higher we get.

11.4 (a) $F_g = V_{ice} \cdot \rho_{ice} \cdot g + m_{santa} g = A \cdot l \cdot \rho_{ice} \cdot g + m_{santa} \cdot g$

$F_{buoy} = V_{ice\ in\ water} \cdot \rho_{water} \cdot g = A \cdot (l-d) \cdot \rho_{water} \cdot g$

Equilibrium: $V_{ice} \cdot \rho_{ice} \cdot g + m_{santa}\, g = A\,(l-d)\,\rho_{water} \cdot g$ +

$$\Leftrightarrow \quad l = \frac{d \cdot A \cdot \rho_w + m_{santa}}{A \cdot (\rho_w - \rho_i)}$$

Values: $d = 0{,}1 \text{ m}$ $\quad A = 100 \text{ m}^2$ $\quad \rho_w = 1 \frac{g}{cm^3}$ $\quad m_{santa} = 10\,000 \text{ kg}$

$\rho_{ice} = 0{,}9169 \frac{g}{cm^3}$ (Wolfram Alpha)

$\Rightarrow l \approx 2{,}4 \text{ m}$ −

(b) Equilibrium at $A(l-s')\rho_{water} \cancel{g} = A\,l\,\rho_{ice}\, g \Rightarrow s' = l \cdot \frac{\rho_{water} - \rho_{ice}}{\rho_{water}} \approx 0{,}2 \text{ m}$

THIS PAGE INTENTIONALLY LEFT BLANK. ?

(c) $F_{buoy, ice} = A(l-(d+x))\, \rho_W \cdot g$ where x is the distance Santa has already been lifted

$F_{g, ice} = A \cdot l \cdot \rho_{ice} \cdot g$

$$F_{reindeers} = m_{Santa} \cdot g - (F_{buoy, ice} - F_{g, ice})$$

$$W_{Reindeers} = \int_{x_0}^{x_1} F_{reindeers}\, dx$$

$x_0 = 0 \quad x_1 = s' - d$ (when the ice floe is in equilibrium on the ocean.

$$\Rightarrow W = m \cdot g \cdot \cancel{(s'-d)}\, x_1 - A \cdot g \cdot \left(\int_0^{x_1} l \rho_W\, dx - \left(\int_0^{x_1} d \rho_W\, dx + \int_0^{x_1} x \rho_W\, dx \right) - \int_0^{x_1} l \rho_i\, dx \right)$$

$$= m \cdot g\, x_1 - Ag \left(l \rho_W x_1 - d \rho_W x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \rho_W - l \rho_i x_1 \right)$$

$$= g \cdot x_1 \left(m - A \left(\left[l - \left(d + \frac{1}{2} x_1\right) \right] \rho_W - l \cdot \rho_i \right) \right)$$

Plug in values: $x_1 = s' - d = 0{,}1\,m \qquad d = 0{,}1\,m$

$m = 10\,000\,kg \qquad \rho_W = 1\,\frac{g}{cm^3}$

$A = 100\,m^2 \qquad \rho_i = 0{,}9167\,\frac{g}{cm^3}$

$l = 2{,}4\,m$

$$\Rightarrow \underline{W \approx 4{,}951\,kJ}$$

11