Name(n): Malika Renz, Jannis A. Schnitzer Gruppe: 7 (Alexej Streltsov) Punkte: 7 | 10 | 10 | 5

1. Übungsblatt PHYSIK I WS 2011/2012

Abgabe: **20.-21. Okt 2011** im Gruppenunterricht **2 Seiten!**

1.1 Statistik: Normalverteilung (10 Punkte)

Um das Unterwasserschiff von Sportbooten vor Bewuchs zu schützen, werden die Schiffe mit einem so genannten Antifouling-Anstrich versehen, bevor sie ins Wasser kommen. Um einen maximalen Anwuchsschutz von 4 Jahren zu erzielen, schreibt der Hersteller eine Trocken-Schichtdicke von 150 µm vor. Eine Ultraschallmessung in der Werft an $N = 12$ Stellen Ihrer Segelyacht ergab die folgenden Messwerte:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Messwert x in µm	153	152	155	154	154	155	152	154	153	151	157	150

a) Berechnen Sie aus diesen Messungen den Mittelwert $\langle x \rangle$ und die Standardabweichung 1800

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}}\ .$$

b) Ausgehend von den gemessenen Werten könnte man darauf schließen, dass die Schichtdicke überall größer als die geforderten 150 µm ist. Unter der Annahme, dass die Messwerte einer Gaußverteilung folgen, gilt, dass

- 90% aller Messwerte eine Abweichung von höchstens 1,645σ,
- 95% aller Messwerte eine Abweichung von höchstens 1,960σ,
- 99% aller Messwerte eine Abweichung von höchstens 2,575σ

vom Mittelwert $\langle x \rangle$ haben müssen. Ist damit der maximale Anwuchsschutz an einer beliebigen Stelle mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%, 95% oder 99% gewährleistet?

Hinweis: Überlegen Sie, welche Abweichungen den Anwuchsschutz gefärden oder stärken!

1.2 Neutrino-Geschwindigkeit (10 Punkte)

Neutrinos sind leichte, schwach wechselwirkende fundamentale Teilchen, deren Eigenschaften noch nicht ausreichend erforscht sind. Kürzlich wurde eine Messung der Neutrino-Geschwindigkeit durch das OPERA-Experiment veröffentlicht. Dabei wurde ein am Europäischen Kernforschungslabor (CERN) in der Nähe von Genf erzeugter Neutrinostrahl mit einem unterirdirschen Neutrino-Detektor im Gran-Sasso-Massiv in Abruzzen, Italien, detektiert. Der Abstand zwischen dem mittleren Neutrino-Erzeugungspunkt und dem Detektor beträgt $l = 730,085$ km. Die gemessene Ankunftszeit von Neutrinos ist um den Betrag

$$\Delta t = [60,7 \pm 6,9(\text{stat.}) \ \pm 7,4(\text{syst.})]\text{ns}$$

kürzer als die mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum berechnete Zeit.

a) Berechnen Sie den relativen Unterschied $(v - c)/c$ zwischen der gemessenen Neutrino-Geschwindigkeit v und der Lichtgeschwindigkeit c.

b) Berechnen Sie die gesamte absolute Unsicherheit σ der Zeitmessung aus der quadratischen Summe der statistischen und systematischen Unsicherheit. Um wie viele σ weicht die gemessene Zeitdifferenz von Null ab? Unter Voraussetzung, dass die Unsicherheit der Längenmessung vernachlässigbar klein ist, um wie viele Standardabweichungen übersteigt die gemessene Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit?

Δt 68

c) Unter der Annahme, dass die wahre Neutrino-Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit gleich ist, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass so eine oder eine noch größere Abweichung allein durch statistische Schwankungen entsteht?

Eine Tabelle mit Wahrscheinlichkeiten für statistische Schwankungen bei einer Messung findet man u.a. in der englischen Wikipedia unter Standard deviation.

Den OPERA-Preprint findet man im arXiv:1109.4897

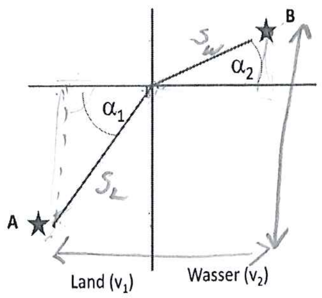
1.3 Zeitzonen (10 Punkte)

Wie viele Längengrade müssen wir reisen, dass sich die lokale Mittlere Sonnenzeit (auch Mittlere Ortszeit, MOZ, genannt) um 1 Stunde ändert? Mit welcher Geschwindigkeit müssen wir uns auf der Breite von Heidelberg (Breitengrad 49.4°) westwärts bewegen, dass sich die lokale Mittlere Sonnenzeit nicht ändert?

Zur Begriffserklärung Mittlere Sonnenzeit s. Wikipedia Ortszeit. ✓

1.4 Wegoptimierung (10 Punkte)

Ein Schwimmer gerät am Ort B in Not. Welchen Weg muss ein Retter am Ort A nehmen, um den Schwimmer schnellstmöglich zu retten, wenn er sich an Land mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt, und im Wasser mit v_2? Berechnen Sie das Verhältnis aus Einfalls- und Ausfallswinkel, $\sin\alpha_1 / \sin\alpha_2$. Das Ergebnis folgt einem wichtigen Konzept aus der Optik, dem Fermatschen Prinzip.



$$\frac{1}{9} \quad \overset{\frac{16}{9}}{(-1,\bar{3})^2} \quad \frac{25}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{25}{9} \quad \frac{16}{9}$$

$$(0,\bar{3})^2 + (\cancel{1,\bar{6}})^2 + (1,\bar{6})^2 + (-0,\bar{6})^2 + (-0,\bar{6})^2 + (1,\bar{6})^2 + (-1,\bar{3})^2$$

$$+(0,\bar{6})^2 + (-0,\bar{3})^2 + (-2,\bar{3})^2 + (3,\bar{6})^2 + (-3,\bar{3})$$

$$\frac{16}{9} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{49}{9} \quad \frac{121}{9} \quad \frac{100}{9} = \frac{378}{9} = 42$$

$1,954$ $\quad \sqrt{\frac{s}{7}}$ $\quad$ cos GAGA HHAG

V_L $\quad V_W$

$$t = \frac{S}{V}$$

$$t_{ges} = \frac{|S_L|}{V_L} + \frac{|S_W|}{V_W}$$

$$= \frac{Y_a \cdot V_L}{\sin\alpha_1} + \frac{Y_b \cdot V_W}{\sin\alpha_2}$$

$$|S_L| = \frac{x_{ges} - x_a}{\cos\alpha_1} = \frac{Y_{ges} - Y_b}{\sin\alpha_1}$$

$$|S_W| = \frac{x_{ges} - x_b}{\cos\alpha_2} \qquad \frac{Y_{ges} - Y_a}{\sin\alpha_2}$$

$$S_L \cdot \sin\alpha_1 = Y_{ges} - Y_b = Y_a$$

$$S_W \cdot \sin\alpha_2 = Y_{ges} - Y_a = Y_b$$

$$Y_{ges} = S_L \sin\alpha_1 + S_W \cdot \sin\alpha_2$$

$$S_L = \frac{Y_a}{\sin\alpha}$$

$$Y_{ges} = Y_b + Y_a$$

...itilea Renz — Ex - Arbeitsblatt 1

1.1

a)

- using the given formula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}$

$\langle x \rangle \equiv \bar{x} \equiv \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{n} = \frac{1840\ \mu m}{12} = 153{,}\bar{3}\ \mu m$ V+

$\sigma = \sqrt{\frac{42}{12-1}} \approx 1{,}954$ [?] V+

- considering that we've only got 12 measures, the formula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}}$ might be more appropriate

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{42}{12}} \approx 1{,}871$

b)

· 90% deviation of no more than $1{,}645\,\sigma = 3{,}214$

$1{,}645\,\sigma_1 = 3{,}078$

We only have to focus on ½ of the deviation, because there are only problems when the layer of ~~protection~~ antifouling stuff is thinner, deviations into the positive area are of no interest

$\langle x \rangle - \cancel{\frac{1{,}645\,\sigma}{2}}$ $1{,}645\,\sigma = 150{,}12$ ✓ $\approx \cancel{151{,}726} > 150$ ✓

Maximum protection assured (as well for σ_1) with a propability of 90%

· 95% deviation of no more than $1{,}960\,\sigma = 3{,}83$

$1{,}960\,\sigma_1 = 3{,}667$

$\langle x \rangle - \cancel{\frac{1{,}960\,\sigma}{2}}$ $1{,}960\,\sigma$ ~~= 151,418 > 150~~ ✓ 149,5 < 150 ✓

Maximum protection assured ~~(as well for σ_1)~~ with a propability of ~~for~~ only 97,5%

· 99%

$2{,}575\,\sigma = 5{,}032$

$2{,}575\,\sigma_1 = 4{,}817$

~~$\langle x \rangle - \frac{2{,}575\,\sigma}{2} = 150{,}673 > 150$~~ $\langle x \rangle - 2{,}575\,\sigma = 148{,}3 < 150$

Maximum protection ~~still assured~~ not assured for at least 0,05% of all measures

1.2

a)

$$\frac{(v-c)}{c} = \frac{(299.799.931 \pm 849,45\,[stat] \pm 911\,[syst] - c)}{c}$$

$$= 2,48 \pm 0,28\,[stat] \pm 0,30\,[syst] \cdot 10^{-5}$$

NR:

$t_{Light} = 2435\,301,42\,us$

$t_{Neut} = \cancel{218813,28 \pm}$
$2435\,240,72 \pm 6,9 \pm 7,4$

Halle
INF 701

b)

abs. dev. : $((0,28 + 0,3) \cdot 10^{-5})^2 = 3,364 \cdot 10^{-11}$

$\sigma \quad c^2$

max. expectation value

Somewhere around 6σ

↳ c) ~~prop~~ probability tends

for zero

Jannis Andrija Schnitzer

1.2. Known values:

Distance of travel (Baseline) $l = 730085$ km

Note: The given baseline $l = 730\,085$ km does not match the baseline length as in the OPERA experiment publication, which is $l_0 = 731\,278{,}0$ m ± 0.2 m [1]

Difference of neutrino arrival time from expected value $\Delta t = (60{,}7 \pm 6{,}9_{stat} \pm 7{,}4_{syst})$ ns

(a) Relative difference between neutrino velocity and speed of light:

Looking for $\frac{v-c}{c}$

$$v = \frac{l}{TOF_c - \Delta t} \quad \text{with} \quad TOF_c = \frac{l}{c} \quad \text{(Time of flight: expected value for } v=c\text{)}$$

$$\frac{v-c}{c} = \frac{\frac{l}{TOF_c - \Delta t} - \frac{l}{TOF_c}}{c}$$

$$= \frac{l}{c(TOF_c - \Delta t)} - \frac{l}{TOF_c \cdot c} = \frac{l}{l - c\Delta t} - \frac{l}{l} = \frac{l}{l - c\Delta t} - \frac{l - c\Delta t}{l - c\Delta t}$$

$$= \frac{c\,\Delta t}{l - c\Delta t} = \frac{\Delta t}{\frac{l}{c} - \Delta t} = \frac{\Delta t}{TOF_c - \Delta t}$$

$TOF_c = \frac{l}{c} = 2{,}435$ ms $\Rightarrow \frac{v-c}{c} = \underline{2{,}493 \cdot 10^{-5}}$ V+

(b) Uncertainties: $\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\sigma_{\Delta t, stat}^2 + \sigma_{\Delta t, syst}^2} = \sqrt{6{,}9^2 + 7{,}4^2}$ ns $= \underline{10{,}1 \text{ ns}}$ +V

Significance: $\frac{\Delta t}{\sigma_{\Delta t}} = \frac{60{,}7}{10{,}1} = \underline{6}$ V+

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{dv}{d\Delta t}\right)^2 \cdot \sigma_{\Delta t}^2}$$

Comment: $v(\Delta t) = \frac{l}{TOF_c - \Delta t}$

$\frac{dv}{d\Delta t} = \frac{l}{(TOF_c - \Delta t)^2}$

$$= \left|\frac{dv}{d\Delta t}\right| \cdot \sigma_{\Delta t} = \frac{l}{(TOF_c - \Delta t)^2}\,\sigma_{\Delta t} = \underline{1243 \tfrac{m}{s}}$$

: How many times σ_v is v larger than c:

$$\frac{v-c}{\sigma_v} = \underbrace{\frac{v-c}{c}}_{\text{see (a)}} \cdot \left(\underbrace{\frac{\sigma_v}{c}}_{\frac{1243 \frac{m}{s}}{c} = 4{,}15 \cdot 10^{-6}}\right)^{-1} = \underline{6{,}01} \quad \text{V+}$$

?!

(c) Probability for a stat. deviation of $+6\sigma$ is: $P = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\right) = \underline{9{,}87 \cdot 10^{-8}\,\%}$

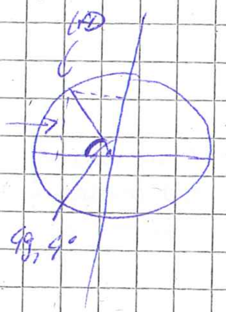
(The factor $\frac{1}{2}$ is added because only a $+6\sigma$ deviation is considered, -6σ deviation are not of interest.) !!

Sources:

[1] ~~Mean~~ The OPERA Collaboration: Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam (arXiv:1109.4897v1)

1.3

~~30~~ 360 Längengrade pro Erdumrundung
24 h pro Tag
↳ 15° entsprechen 1h +V



$U = 2\cdot\pi\cdot r$

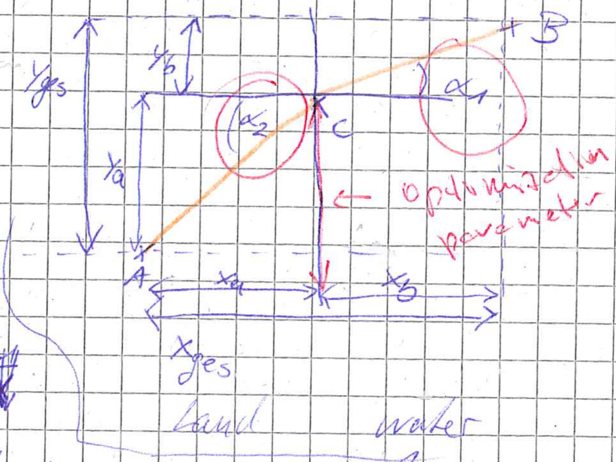
$= 2\cdot\pi\cdot\cos 49{,}4^\circ \cdot 6370\,km$

$\approx 26.046{,}5\,km$

$v = \frac{U}{24h} \approx 1085{,}3\,\frac{km}{h}$ ✓ +

A: We'd have to pass 15 degrees of longitude or travel with the velocity of the rotation of the earth which equals 1085 $\frac{km}{h}$ on the degree of latitude of HD.

1.4. 5 points



$t_{ges} = t_L + t_W = \frac{s_L}{v_L} + \frac{s_W}{v_W} = \cancel{\sqrt{y_a^2 + x_a^2}} \ldots y_{ges}$

$= \frac{\sqrt{y_a^2 + x_a^2}}{v_L} + \frac{\sqrt{(x_{ges} - x_a)^2 + y_b^2}}{v_W}$

to get a minimum

$t'_{ges} = \frac{1}{v_L}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_L}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x_a \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a^2+x_a^2}} + \frac{1}{v_W}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cancel{x_{ges}} - 2(x_{ges}-x_a)\cdot\frac{1}{\sqrt{(x_{ges}-x_a)^2+y_b^2}}$

or x_a ??!
y_a

$= \frac{1}{v_L}\cdot\underbrace{\frac{x_a}{\sqrt{y_a^2+x_a^2}}}_{\cos\alpha} - \frac{1}{v_W}\underbrace{\frac{(x_{ges}-x_a)}{\sqrt{(x_{ges}-x_a)^2+y_b^2}}}_{\cos\beta} \overset{!}{=} 0$

minimum

$\frac{1}{v_L}\cos\alpha - \frac{1}{v_W}\cos\beta = 0 \Rightarrow \frac{v_W}{v_L} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$