M 0 10

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 3,5 | 2 | 1,5 | 3,5 | 10,5 |

Jannis Schnitzer
Themistokles Paraskevis

1. (i) $\Rightarrow$ (ii) klar. ✓

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $T$ in $x_0$ stetig.

Betrachte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in E_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$;

$x_n$ konvergiere im Limes $n\to\infty$ gegen $x_1 \in E_1$.

Setze $z_n := x_n + x_0 - x_1$

$$\Rightarrow z_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad ✓$$

$$\Rightarrow T(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} T(x_0) \quad ✓$$

Betrachte nun
$$T(x_n) - T(x_1) = T(z_n - x_0 + x_1) - T(x_1)$$
$$= T(z_n) - T(x_0) + T(x_1) - T(x_1)$$
$$= T(z_n) - T(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x_1) \Rightarrow$ Stetigkeit in $x_1$, also ganz $E_1$. $\square$ ✓

(iv) $\Rightarrow$ (i)~~(ii)~~: Existiere $C > 0$ s.d. $\|T(x)\|_{E_2} \leq C\|x\|_{E_1}$

~~Sei~~ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E_1$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt:

$\|x_n\|_{E_1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (ist so definiert)

$\Rightarrow \|T(x_n)\|_{E_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow T$ stetig in $0$ [$\Rightarrow T$ stetig (nach (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftarrow$)]

(i) $\Rightarrow$ (iv). Angenommen, $T$ sei unbeschränkt.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E_1,\ x_n \neq 0$ mit $\|T(x_n)\|_{E_2} \geq n\|x_n\|_{E_1}$.

Setze $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|_{E_1}} \Rightarrow \|y_n\|_{E_1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

$$\|T(y_n)\|_{E_2} = \frac{\|T(y_n)\|_{E_2}}{\|y_n\|_{E_1}} = \frac{\|T(\frac{x_n}{\|x_n\|})\|_{E_2}}{\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\|_{E_1}} = \frac{\|\frac{1}{\|x_n\|}T(x_n)\|_{E_2}}{\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\|_{E_1}}$$

$$= \frac{\cancel{\|x_n\|_{E_1}}}{\cancel{\|x_n\|_{E_1}}} \frac{\|T(x_n)\|_{E_2}}{\|x_n\|_{E_1}} =: A_n \geq n \text{ (wg. Unbeschränktheit)}$$

Setze $z_n := \frac{1}{A_n} y_n$. $\|z_n\|_{E_1} = \frac{1}{A_n}$, da $\|y_n\|_{E_1} = 1$. ✓

$$\Rightarrow \|z_n\|_{E_1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad ✓$$

Aber $\|T(z_n)\|_{E_2} = \|T(\frac{1}{A_n} y_n)\|_{E_2} = \|\frac{1}{A_n} T(y_n)\|_{E_2} = \frac{1}{A_n}\|T(y_n)\|_{E_2} = \frac{A_n}{A_n} = 1$

$\Rightarrow T(x)$ unstetig in $x_0 = 0$ ↯ $\Rightarrow$ ($T$ stetig $\overset{\text{in } 0}{\Rightarrow}$ $T$ beschr.) ✓

(iv) ⇒ (iii) Es gebe $C$ s.d. $\|T(x)\|_{E_2} \leq C\|x_2\|_{E_1}$

Dann gilt für alle $x$, für die $\|x\|_{E_1} \leq 1$ gilt:

$$\|T(x)\|_{E_2} \leq C\|x\|_{E_1} \leq C$$

$$\Rightarrow \sup\{\|T(x)\|_{E_2} \mid \|x\|_{E_1} \leq 1\} \overset{!}{\leq} C < \infty$$ ✓

und für alle $x$, für die $\|x\|_{E_1} = 1$ gilt:

$$\|T(x)\|_{E_2} \leq C\|x\|_{E_1} = C$$

$$\Rightarrow \sup\{\|T(x)\|_{E_2} \mid \|x\|_{E_1} = 1\} \overset{!}{\leq} C < \infty$$

(Bedingung der kleinsten oberen Schranke durch Existenz von $C$ erfüllt: seien $C_k$, $k \in \mathbb{N}$ alles Schranken im Sinne von (iv) $\Rightarrow C := \inf\{C_k \mid k \in \mathbb{N}\}$)

Die Gleichheit ist noch zu zeigen!

(iii) ⇒ (iv): Es existiere $D = \sup\{\|T(x)\|_{E_2} \mid \|x\|_{E_1} = 1\}$

Sei $x \in E_1 \setminus \{0\}$ allgemein.

Setze $y := \frac{x}{\|x\|_{E_1}} \Rightarrow \|y\|_{E_1} = 1$ ✓

$\Rightarrow \|T(y)\|_{E_2} \leq D$ ✓

$\Leftrightarrow \|T(\frac{x}{\|x\|_{E_1}})\|_{E_2} \leq D$ ✓

$\Rightarrow \|\frac{1}{\|x\|_{E_1}} T(x)\|_{E_2} \leq D$ ✓

$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_{E_1}} \|T(x)\|_{E_2} \leq D \Rightarrow \|T(x)\|_{E_2} \leq D\|x\|_{E_1}$ □ ✓

→ Alle Aussagen sind äquivalent. qed

✓

3,5/4

Nr 2

a) /

1 b) Beh: $h$ ist unstetig im Pkt. $(0,0)$

Beweis:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$

für $x = \lambda y^2$ mit $\lambda \neq 0$

$$h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{\lambda y^2 \cdot y^2}{(\lambda y^2)^2 + y^4} = \frac{\lambda y^4}{\lambda^2 y^4 + y^4}$$

$$= \frac{\lambda y^4}{(\lambda^2+1)y^4} = \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)}$$

Nein. Dieser Limes existiert nicht.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \cancel{=} \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda \neq 0}}{\neq} 0 = h(0,0)$$

→ $h$ nicht stetig im Pkte $(0,0)$ ✓

1 c) Beh. Die Einschränkung von $h$ auf jede Gerade durch $(0,0)$ ist stetig

Sei $g$ Gerade durch $(0,0)$

$$g: y = mx \to \begin{cases} g: y = mx \text{ mit } m \in \mathbb{R} \\ \text{oder } g: x = 0 \end{cases}$$

Fall 1:

Setze $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m \cdot \alpha\}$

Betrachte die Einschränkung von $h$ auf $A$ $h|_A$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ $h|_A : A \to \mathbb{R}$

$$h|_A(x,y) = h(x,y) = h(x,mx)$$

$$= \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}$$

Man sieht: $h|_A$ ist ein Pkt. von $x$. nur.

$$g(x) := \begin{cases} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} & , \overset{x}{\cancel{\alpha}} \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bel.

**Fall 1.1** $x_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to \cancel{\infty}\, x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \to x_0} \frac{m^2 x^3}{x^2 (1 + m^4 x^2)}$$

$$= \frac{m^2 x_0^3}{x_0^2 (1 + m^4 x_0^2)} = g(x_0)$$

→ g stetig im Pkt. $x_0$ ✓

**Fall 1.2** $x_0 = 0$

$$g(x) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{m^2}{1 + m^4 \alpha^2}$$

$$= x \cdot \frac{m^2}{1 + m^4 x^2}$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{m^2}{1 + m^4 \cdot 0} \cdot 0 = 0$$ ✓

→ d.h. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ → g stetig im Pkt. 0 ✓

**Fall 2** $g: x = 0$

Setze $A := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y)$ liegt auf $g \}$

x = 0

$$= \{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \}$$ ✓

$$h|_A (x, y) = h(x, y) = h(0, y) = \begin{cases} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = 0 & , y \neq 0 \\ h(0, 0) = 0 & , y = 0 \end{cases}$$

$$= 0$$

→ $h|_A$ ist konstant und somit stetig ▨ ✓

3/4

# Nr 3

Gegeben ist $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , a \in \mathbb{R}$

$$f_a(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} & , \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Umformung:

$$\left.\begin{matrix} x := t \\ y := t \end{matrix}\right\} t \to \;\Rightarrow (x,y) \to (0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{t \cdot t}{(t^2+t^2)^a} = \frac{t^2}{(2t^2)^a} = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{(t^2)^{a-1}}$$

i) $a = 1$:

$$f_1(t,t) = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{(t^2)^0} = \frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t,t) = \frac{1}{2} \leftarrow$ ~~stetig~~. nicht stetig.

ii) $a > 2$:

$$\Rightarrow f_a(t,t) = \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{(t^2)^{a-1}}$$

$\lim\limits_{t \to 0} f_{a>2}(t,t)$ ~~[illegible]~~ $\to \infty \leftarrow$ nicht stetig. ✓

iii) $a \leq 0$:

Wir haben: $\frac{1}{2^{-a}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{-a-1}} = 2^a \cdot (t^2)^{a-1} = f_{a\leq 0}(t,t)$

$\lim\limits_{t \to 0} f_{a \leq 0}(t,t) \to 0 \leftarrow$ stetig. Nein. (t,t) zu betrachten reicht nicht.

iv) $1 \leq a < 2$:

$$a := 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a = 1 + \frac{1}{n+1}$$

Hä?

→

$$g(x) := \begin{cases} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} & , \overset{x}{\cancel{\alpha}} \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bel.

Fall 1.1 $\quad x_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to \underset{x_0}{\cancel{\infty}}} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \to x_0} \frac{m^2 x^3}{x^2(1 + m^4 x^2)}$$

$$= \frac{m^2 x_0^3}{x_0^2 (1 + m^4 x_0^2)} = g(x_0)$$

$\rightarrow$ g stetig im Pkt. $x_0$ ✓

Fall 1.2 $\quad x_0 = 0$

$$g(x) = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{m^2}{1 + m^4 \alpha^2}$$

$$= x \cdot \frac{m^2}{1 + m^4 x^2}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{m^2}{1 + m^4 \cdot 0} \cdot 0 = 0$$ ✓

$\rightarrow$ d.h. $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow$ g stetig im Pkt. 0 ✓

Fall 2 $\quad g: x = 0$

Setze $A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y)$ liegt auf $g \}$

x = 0

$= \{ (0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \}$ ✓

$$h|_A (x,y) = h(x,y) = h(0,\overset{y}{\cancel{0}}) = \begin{cases} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = 0 & , y \neq 0 \\ h(0,0) = 0 & , y = 0 \end{cases}$$

$$= 0$$

$\rightarrow h|_A$ ist konstant und somit stetig ∎ ✓

3/4

- $n=0: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \overset{\lim_{t\to 0}}{\uparrow} \left[ \frac{1}{2^{(1+\frac{1}{n+1})}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{(1+\frac{1}{n+1}-1)}} \right]$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{(t^2)^1} \Longrightarrow \infty \quad \leftarrow$ nicht stetig

- $n=1: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \left( \frac{1}{2^{(1+\frac{1}{2})}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{(1+\frac{1}{2}-1)}} \right)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \left( \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{1/2}} \right)$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2^{3/2}} \cdot \frac{1}{t} \Longrightarrow \infty$

$\vdots$

- $n=\infty: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \left( \frac{1}{2^1} \right) \cdot \left( \frac{1}{(t^2)^0} \right) = \frac{1}{2} \quad \longleftarrow$ nicht stetig

$\nwarrow$ Nein!

v) $0 < a \leq 1 \quad , \quad a := \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a = \frac{1}{n+1}$ ?

$n=0: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \left( \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{(t^2)^0} \right) = \frac{1}{2}$

$n=1: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \left( \frac{1}{(2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(t^2)^{-1/2}} \right.$

$= \lim\limits_{t\to 0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{t^2} \Rightarrow 0 \leftarrow$ stetig

$n=\infty: \lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{(2)^0} \cdot \frac{1}{(t^2)^{-1}} = \overset{\lim_{t\to 0}}{\uparrow} (1 \cdot t^2)$

$= 0 \leftarrow$ stetig ∎

Antwort: Die Funktionenschar $f_a(x,y)$ ist für $a: -\infty \leq a < 1$ stetig.

Was soll denn das mit der Reihen?!

1/4

4. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF in $L(E_1, E_2)$ bez. $\|\cdot\|_{op}$.

$\Rightarrow$ Es gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall m, n \geq N$: $\|T_m - T_n\|_{op} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|T_n(x) - T_m(x)\|_{E_2} \leq \varepsilon \|x\|_{E_1}$ (*) $\forall x \in E_1$

$\Rightarrow$ Für festes $x$ ist $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CF in $E_2$. ✓

$\Rightarrow$ Es existiert ein $t_x = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) \in E_2 \quad \forall x \in E_1$. ✓

Betrachte $T(x) = t_x = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$.

Zeige $T \in L(E_1, E_2)$.

Linearität: $T(\alpha x + \beta y) = t_{\alpha x + \beta y} = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y)$

$$\overset{T_n \text{ linear}}{=} \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \alpha t_x + \beta t_y \quad \square$$

✓

Stetigkeit: Zeige Aufgabe 1 (iv) $\Rightarrow$ (i)

Aus A1(iii) folgt $\|T_n\|_{op} \leq C < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Wie folgt das? Das muss gezeigt werden

Nach 17.33 ist $\|\cdot\|_{E_2}$ stetig bez. sich selbst

$\Rightarrow \|T(x)\|_{E_2} = \|\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)\|_{E_2} = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_{E_2}$ ✓

$\leq \limsup\limits_{n\to\infty} \|T_n\|_{op} \cdot \|x\|_{E_1} \leq C \|x\|_{E_1} \Rightarrow A_1$ (iv) $\Rightarrow$ (i) = Stetigkeit $\square$

da $\|T(x)\|_{E_2} \leq \|T\|_{op} \cdot \|x\|_{E_1} \ \forall T \in L(E_1, E_2)$ (vgl. A1, Bew. (iii) $\Rightarrow$ (iv))

$\Rightarrow T \in L(E_1, E_2)$. (✓)

Betrachte (*): $\|T_m(x) - T_n(x)\|_{E_2} \leq \varepsilon \|x\|_{E_1}$ (für $m \geq N$)

Bilde $\lim\limits_{n\to\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|T_m(x) - T_n(x)\|_{E_2} \underset{\|\cdot\|_{E_2} \text{ stetig}}{=} \|\lim\limits_{n\to\infty} T_m(x) - \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)\|_{E_2}$

$= \|T_m(x) - T(x)\|_{E_2} \leq \varepsilon \|x\|_{E_1}$ ✓

$\Rightarrow \|T_m - T\|_{op} \leq \varepsilon$ für $m \geq N$ ($N$ abh. von $\varepsilon$; $\varepsilon$ belieb.) ✓

$\Rightarrow T_m \xrightarrow{m\to\infty} T$ bezüglich der Operatornorm. qed ✓

3,5/4