X Themisto PAROUSIS, Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Samuel KILIAN, Mo14

1	2	3	4	Σ
1	0,5	4	0,5	6

Prof. Dr. Mark Podolskij | Analysis II | Sommersemester 2012

Blatt ~~2~~ 3

Zentralübung

1. Zeige: Aus $f \in R_\alpha([a,b]) \cap R_\alpha([b,c])$ folgt im Allgemeinen nicht $f \in R_\alpha([a,c])$.

2. Berechnen Sie die folgenden Riemann-Stieltjes Integrale, sofern sie existieren:

(i) $\int_0^1 \lfloor x \rfloor \, d\lfloor x \rfloor$

(ii) $\int_0^1 x \, d\sin(x)$

(iii) $\int_0^1 x^2 \, d\alpha(x)$ mit

$$\alpha(x) := \begin{cases} 2 - \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j, & \text{falls } 2^{-(n+1)} \le x < 2^{-n}, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}.$$

Hausaufgaben

1. Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion. Sei weiter $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{x \in [0,1]; |f(x)| > \varepsilon\}$ eine endliche Menge. Dann gilt $f \in R_\alpha([0,1])$ und $\int_0^1 f(x) d\alpha(x) = 0$.

2. Wir definieren die Funktion $\beta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

und $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 0, \\ -1, & \text{falls } x \ge 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f nicht Riemann-Stieltjes integrierbar ist bezüglich β.

Bitte wenden!

(3) Es sei α eine monoton wachsende Funktion auf $[a, b]$.

a) Es seien $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $fg, |f|^p, |g|^q \in \mathcal{R}_\alpha([a, b])$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\Big| \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x) \Big| \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x) \Big)^{1/p} \Big(\int_a^b |g(x)|^q d\alpha(x) \Big)^{1/q}.$$

b) Für Funktionen f mit $|f|^2 \in \mathcal{R}_\alpha([a, b])$ definieren wir

$$\|f\|_2 = \Big\{ \int_a^b |f|^2 d\alpha \Big\}^{1/2}.$$

Zeigen Sie für Funktionen f, g, h die Dreiecks-Ungleichung

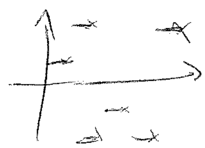
$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2,$$

unter der Annahme, dass alle Integrale existieren.

4. Beweisen Sie Satz 15.11 aus der Vorlesung:

Es sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ und $\alpha(x) = \sum_{j=1}^k c_j \mathbb{1}_{(x_{j-1}, x_j)}(x)$. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist bezüglich α Riemann–Stieltjes-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j f(x_j)$$



mit $\alpha_0 = c_1 - \alpha(a)$, $\alpha_k = \alpha(b) - c_k$, $\alpha_j = c_j - c_{j-1}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion α als Differenz von zwei monotonen Funktionen darstellbar ist.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 09.05. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \cdot \{ \alpha(\tilde{x}_{j-1}) - \alpha(\tilde{x}_j) \}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{(x_{i-1}, x_i)}(\tilde{x}_{j-1}) - \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{(x_{i-1}, x_i)}(\tilde{x}_j)}_{} \Big\}$$

Wenn $|Z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$: 0, außer

wenn $\tilde{x}_{j-1} < x_i < \tilde{x}_j$

$\Rightarrow \xi_j = x_i$

ges.: $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$

~~$a - b = c_i$~~

$a_i - b_i = c_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

a_i monoton

b_i monoton

$$\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(c_i - c_{i-1}) \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^k f(\xi_j)(c_i - c_{i-1}) \quad \text{wobei } \tilde{x}_{j-1} < \xi_j < \tilde{x}_j$$

$$= \sum_{i=1}^k f(x_i)(c_i - c_{i-1}) \qquad \square$$

1. Zeige: $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_\alpha(f, z_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_\alpha(f, z_n) = 0$

$$\overline{S}_\alpha(f, z_n) = \sum_{j=1}^{n} \sup(f(I_j))\,(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}));\quad I_j := [x_j, x_{j-1}]$$

Aus Voraussetzung folgt: $f(x) = 0$ für fast alle x Nein!

$\Rightarrow$ f hat m_1 Punkte, für die $f(\hat{x}_i) > 0$ $(i \in \{1, m_1\})$
und m_2 Punkte, für die $f(\check{x}_i) < 0$ $(i \in \{1, m_2\})$.
nein.

Setze

$$b_n(\xi, z_n) := \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{I_j}(\xi) \cdot (\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}))$$

$\Rightarrow$ für alle Intervalle, die ξ enthalten, wird der Summand $(\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}))$ bzgl. dieses Intervalls addiert.

(Dies sind mindestens 0 und maximal 2, insbesondere auch für $n \to \infty$ endlich viele IV.)

Es gilt: $\overline{S}_\alpha(f, z_n) = \sum_{i=1}^{m_1} f(\hat{x}_i) \cdot b(\hat{x}_i, z_n)$.

Da in der Summe $b_n(\xi, z_n)$ maximal zwei, also insgesamt endlich viele Summenglieder ungleich 0 sind, und weil α monoton und stetig ist, gilt für $n \to \infty$ $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) \to 0$
$\Leftrightarrow |z_n| \to 0$:

$\Rightarrow b_n(\xi, z_n) \to 0$ (w)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_1} f(\hat{x}_i) \cdot b_n(\hat{x}_i, z_n) \to 0$

Analog $\underline{S}_\alpha(f, z_n) = \sum_{i=1}^{m_2} f(\check{x}_i) \cdot b_n(\check{x}_i, z_n)$ (w)
$\xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

Alles Folgefehler. Annahme $f(x) = 0$ f.ü. falsch!

Gegenbeispiel $f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt} \end{cases}$

1/4

9. Mai. 2012

Nr 2

$b : [-1, 1] \to \mathbb{R}$; $b(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ +1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ -1 & , x \geq 0 \end{cases}$

Der Integrand f ist nicht RS-integrierbar bzgl. des Integrators b.

Beweis: ~~E~~ Widerspruch:

Woher? warum? Darf nicht verwendet werden.

Ist f durch b RS-integrierbar, so sind f & g an keiner Stelle gemeinsam unstetig.

i) $b(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

Für $\lim\limits_{x_0 \to 0^-} b(x)$ ist $b(x) = 0$

Für $\lim\limits_{x_0 \to 0^+} b(x)$ ist $b(x) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x_0 \to 0^-} b(x) \neq \lim\limits_{x_0 \to 0^+} b(x)$ $\Rightarrow$ $b(x)$ bei $x_0 = 0$ unstetig.

ii) $f(x)$ ist bei $x_0 = 0$ unstetig.

$\lim\limits_{x_0 \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x_0 \to 0^+} f(x) = -1$

$$\Rightarrow \lim_{x_0 \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x_0 \to 0^+} f(x)$$

$f(x)$ bei $x = 0$ unstetig.

$f(x)$ und $b(x)$ sind an der selben Stelle $x = 0$ unstetig ↯

$f(x)$ ist nicht durch $b(x)$ RS integrierbar. ∎

0,5/4

4.

Zerlegung besteht aus Pkt. $\tilde{x}_j$

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\left\{\alpha(\tilde{x}_{j-1}) - \alpha(\tilde{x}_j)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{(x_{i-1},x_i)}(\hat{x}_{j-1}) - \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{(x_{i-1},x_i)}(\hat{x}_j) \right\}}$$

Wenn $|Z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$: $\Downarrow$ ist fast immer 0. Ausser genau dann, wenn $\hat{x}_{j-1} \le x_i \le \tilde{x}_j$ (i,i)

(Daraus folgt auch $\xi_j = x_i$, da $\hat{x}_{j-1} \le \xi_j \le \tilde{x}_j$)

Nein

Genauer

$$\Rightarrow \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\cdot(c_i - c_{i-1}) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)\cdot \alpha_i \quad \square$$

Noch zz.: Jedes f ist bzgl. α RS-integrierbar

$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{(x_{j-1},x_j)}(x)$ $\Rightarrow$ ~~Stückw.~~ Treppenfkt. über Folge c_i

$\Rightarrow$ ich muss $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ durch zwei monotone Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konstruieren.

$\rightsquigarrow$ keine Ahnung!

0,5/4

3. 2a) z_n sei Zerl. v. $[a,b]$ mit Stützpkt. x_i, $i \in \{0, \dots, n\}$
ξ sei Vektor von Zwischenpkt wie in VL

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, g(\xi_i) \{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\}$$

$$\int_a^b |f(x)|^p\, d\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^p \cdot \{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\}$$

$$\int_a^b |g(x)|^q\, d\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i)|^q \{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\}$$

$\forall z_n, \xi$:

Setze $a_i := f(\xi_i) \cdot \sqrt[p]{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})}$
$b_i := g(\xi_i) \cdot \sqrt[q]{\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})}$

Aus mon. Wachstum v. α: $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) > 0$ da $x_i > x_{i-1}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|^p \sqrt{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |g(\xi_j)|^q \sqrt{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})} \right)^{1/q} \right)$$

$$= \left(\int_a^b |f(x)|^p\, d\alpha(x) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q\, d\alpha(x) \right)^{1/q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| f(\xi_j)\, g(\xi_j) \sqrt[p]{\dots} \cdot \sqrt[q]{\dots} \right| \right)$$

$$= \cancel{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) g(\xi_j) \cdot \alpha(x)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(|f(\xi_j)\, g(\xi_j)| \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}^{\overbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}^{=1 \text{ n.V.}}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(|f(\xi_j)\, g(\xi_j)| \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\} \right)$$

$$= \int_a^b |f(x)\, g(x)|\, d\alpha(x) \overset{(*)}{\geq} \left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, d\alpha(x) \right|$$ (Begr. siehe nächste Seite)

~~denn~~ $\cancel{\sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)\, g(\xi_j)|}$

$\cancel{\sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)| \dots}$

Einschub: Zeige $\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x)$ für mon. wachsendes α.

$$\sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\} =$$

$$|f(\xi_1)|\{\alpha(x_1)-\alpha(x_0)\} + |f(\xi_2)|\{\alpha(x_2)-\alpha(x_1)\} + \dots + |f(\xi_n)|\{\alpha(x_n)-\alpha(x_{n-1})\} =: S$$

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\cdot\{\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})\} \right| =$$

$$\left| f(\xi_1)\{\alpha(x_1)-\alpha(x_0)\} + \dots + f(\xi_n)\{\alpha(x_n)-\alpha(x_{n-1})\} \right|$$

$$\leq S \quad \square$$

Dreiecksungl. f. reelle Zahlen

$\Rightarrow$ Ungleichung gilt auch für $n\to\infty$ $\Rightarrow$ (*) gilt. ✓

Nach 10.19 aus Ana I:

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) g(x)|\, d\alpha(x) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x)\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q d\alpha(x)\right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) g(x)\, d\alpha(x) \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x)\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q d\alpha(x)\right)^{1/q} \quad \square$$ ✓

2 b) $\|f-h\|_2 = \|f-g+g-h\|_2$. $\|f-g+g-h\|_2^2 = \int_a^b |f-g+g-h|^2 d\alpha$.

$$\int_a^b |f-g+g-h|^2 d\alpha = \int_a^b |f-g+g-h|\,|f-g+g-h|\, d\alpha \underset{\substack{\text{normale}\\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} \int_a^b |f-g|\,|f-g+g-h|\, d\alpha + \int_a^b |g-h|\,|f-g+g-h|\, d\alpha$$

$$\overset{\substack{\text{Hölder}\\(a)}}{\leq} \left(\int_a^b |f-g|^2 d\alpha\right)^{1/2} \left(\int_a^b |f-g+g-h|^2 d\alpha\right)^{1/2}$$

$$+ \left(\int_a^b |g-h|^2 d\alpha\right)^{1/2} \left(\int_a^b |f-g+g-h|^2 d\alpha\right)^{1/2} = \|f-g\|_2 \|f-g+g-h\|_2 + \|g-h\|_2 \|f-g+g-h\|_2$$

sehr schön! ✓ 4/4

$$= (\|f-g\|_2 + \|g-h\|_2)(\|f-g+g-h\|_2) \overset{\text{Kürzen}}{\Rightarrow} \|f-h\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2 \quad \square$$