Malte RENZ, Jannis Andrija SCHNITZER | Tutor: Sven GRÜTZMACHER, Mi 14

Prof. Dr. Mark Podolskij — Analysis I — Wintersemester 2011/12

Blatt 9

1	2	3	4	Σ
4	2,5	4	3	13,5

Zentralübungsaufgaben

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x)$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ 1, & \text{für } x \geq 1/n, \\ nx, & \text{für } 0 < x < 1/n. \end{cases}$$

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ durch

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Berechnen Sie f explizit und bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen.

2. Jedes reelle Polynom ungeraden Grades besitzt wenigstens eine reelle Nullstelle.

3. **a)** Beweisen Sie: Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$, so existiert $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ eine Lipschitz-Funktion? Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ eine Lipschitz-Funktion? Falls ja, geben Sie explizit die Konstante L an.

Hausaufgaben

1. **a)** Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ einer Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(1/x)}$$

an.

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

b) Berechnen Sie alle Grenzwerte an den Randpunkten der Definitionsintervalle, insbesondere auch für $x \to \pm\infty$.

Bitte wenden!

$x \to 0+$ $f(x) \to 0$

$x \to 0-$ $f(x) \to 1$

$x \to +\infty$, $x \to -\infty$ $\}$ $f(x) \to \frac{1}{2}$

c) Fertigen Sie anhand dieser Daten und der Monotonieeigenschaften der Exponentialfunktion eine Skizze des Graphen von f an.

2. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f in allen Punkten aus $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass f in allen Punkten aus $(0,1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass es zu jedem $q \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $x \in [0,1]$ von der Form $x = p/q$ mit $p \in \mathbb{N}$ gibt.

3. Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f eine *Lipschitz*-Funktion, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-Funktion stetig ist.

Es seien f, g zwei Lipschitz-Funktionen.

b) Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$ eine Lipschitz-Funktion ist.

c) Falls M beschränkt ist, so ist auch fg eine Lipschitz-Funktion.

$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq$ ~~$2L|x-y|$~~

$|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$

$\leq L_f|x-y| +$ ~~$L|x-y|$~~ $L_g|x-y|$

$|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)| =$

4. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Mal annimmt.

5.* Bestimmen Sie die Menge S aller reellen Zahlen $c \in (0,1]$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$ existiert $x \in [0,1]$ derart, dass auch $x + c \in [0,1]$ und $f(x) = f(x+c)$.

Hinweis: $\frac{1}{2} \in S$ (vgl. Z3a)), $\frac{1}{10} \in S$, $\frac{2}{10} \in S$, $\frac{3}{10} \notin S$, $\frac{1}{e} \notin S$, $\frac{2}{\pi} \notin S$.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 21.12. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

$\leq |f(x)|\cdot|g(x)-g(y)| + |g(y)|\cdot|f(x)-f(y)|$

$\leq |x-y| \cdot L_g \cdot |f(x)| + |x-y| \cdot L_f \cdot |g(y)|$

$(L_f|g(y)| + L_g|f(x)|) \cdot |x-y|$

$|f(x)\cdot g(x) - f(y)\cdot g(y)|$

$= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|$

$= |f(x)\cdot(g(x)-g(y)) + g(y)\cdot(f(x)-f(y))| \leq |f(x)\cdot(g(x)-g(y))| + |g(y)\cdot(f(x)-f(y))|$

Analysis - Übungszettel 9

9.1

a) Maximal möglicher Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

b)

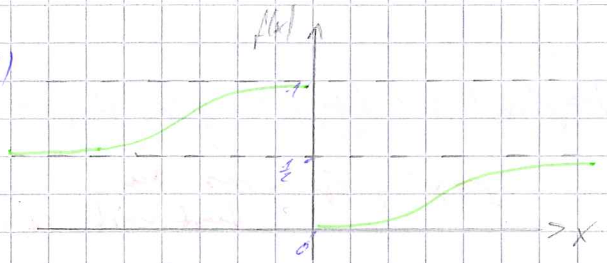
$$\lim_{x_0^+\to 0} f(x) = \lim_{x_0^+\to 0} \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\exp(\tfrac{1}{x})}_{\to\infty}}_{\to\infty}} = 0$$

$$\lim_{x_0^-\to 0} f(x) = \lim_{x_0^-\to 0} \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\exp(\tfrac{1}{x})}_{\to-\infty}}_{\to 1}} = 1$$

$$\lim_{x_0\to+\infty} f(x) = \lim_{x_0\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\exp(\tfrac{1}{x})}_{\to 0}}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x_0\to-\infty} f(x) = \lim_{x_0\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\exp(\tfrac{1}{x})}_{\to 0}}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$$

c)



4/4

9.2

$$f(x) := \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ oder } x=0 \\ \frac{1}{q} & \text{für } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases} \end{cases}$$ mit p,q teilerfremd und $\in\mathbb{N}$

a)

stetig in $x=0$

$f(x) \le x \quad \forall x\in[0,1]$ gilt, da $x \ge 0 \quad \forall x\in[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ und

$\forall x\in\mathbb{R}$ ...

$x = \frac{p}{q} \ge \frac{1}{q} \quad \forall x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\varepsilon: \ \forall x\in U_\delta(0)\cap[0,1]: \ |f(x)-0| = |f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f ist in 0 stetig.

fehlt i-wie was

unterscheidung $\in\mathbb{Q}$ $\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ...

$-\frac{1}{2}$

b)

$\forall q \in \mathbb{N}$ liegen $(q+1)$ Zahlen der Art $\frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{N}$ in $[0,1]$

(Begr.: laufen von $\frac{0}{q}$ bis $\frac{q}{q}$ durch)

$\Rightarrow \exists$ endlich viele Zahlen dieser Art für jedes $q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$q > k\ \ \forall n \geq n_0$ wieso? hä?

$\Rightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ und $x_n = \frac{p}{q}$ $p,q \in \mathbb{N}$: was willst du mit

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: f(x_n) = \frac{1}{q} < \frac{1}{k}\ \ \forall n \geq n_0$ n, n_0?? ?

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: f(x_n) = \frac{1}{q} < \varepsilon\ \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ Alle rationalen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \longrightarrow x_0$) konvergieren gegen 0

$\Rightarrow \forall x_0 \in [0,1]$: mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \forall x_0 \in [0,1]: \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

Da für $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$: $f(x_0) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ gilt, ist f in diesem x_0 stetig

sry, kp was du tust mit n, n_0? $\square$

... -1

c)

Da für $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$: $f(x_0) = \frac{1}{q} \neq 0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ gilt, ist f in diesem x_0 unstetig $\square$

✓

~~2~~ 4,5/4

3. $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$

a) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta := \varepsilon/L \; \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M : |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0| < L \cdot \delta = \varepsilon$ ■

Begründung

b) $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| =$

$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| =$

$|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq$ (Dreiecksungl.)

$\underbrace{\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq L_f |x-y|} + \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\leq L_g |x-y|}}$

gelten, da f, g Lipschitzfunktionen sind

(nochmal ausführlich:)

$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x-y|$
$|g(x) - g(y)| \leq L_g |x-y|$ } Lipschitz

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (L_f + L_g)|x-y|$

$\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq (L_f + L_g)|x-y|$ ■

c) $|(fg)(x) - (fg)(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)|$

$= |f(x)g(x) \underbrace{- f(x)g(y) + f(x)g(y)}_{0} - f(y)g(y)|$

Dreiecksungl. $\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)|$

f, g Lipschitz $\leq |f(x)| \cdot L_g |x-y| + |g(y)| \cdot L_f |x-y|$ (*)

Da M beschränkt, folgt aus dem Zwischenwertsatz:

$\exists |\hat{f}| = \max\{|f(x)| \mid x \in M\}$ und $\exists |\hat{g}| = \max\{|g(x)| \mid x \in M\}$

sodass $|\hat{f}| \geq |f(x)| \; \forall x \in M$ und $|\hat{g}| \geq |g(x)| \; \forall x \in M$

$\Rightarrow$ * $\leq |\hat{f}| \cdot L_g |x-y| + |\hat{g}| L_f |x-y|$

$= (|\hat{f}| L_g + |\hat{g}| L_f)|x-y|$ □

4/4

4. Zunächst zz: f hat keine Extrema.

Angenommen, $x_0 \in \mathbb{R}$ wäre Extremstelle von f. für Maximum / für Minimum

Dann gilt: $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in U_\delta(x_0)$: $f(x) \leq$ (oder $\geq$) $f(x_0)$.

Nach dem Zwischenwertsatz werden alle $y \in [f(x_0 - \delta), f(x_0)]$ einmal angenommen, ebenso alle $y \in [f(x_0), f(x_0+\delta)]$

OBDA ist f in $(x_0 - \delta, x_0)$ und in $(x_0, x_0+\delta)$ jeweils monoton. gilt für hinr. kleines δ wg. Stetigkeit

$\Rightarrow$ Alle $y \in [f_{min}, f(x_0))$ werden in $\dot{U}_\delta(x_0)$ genau zweimal angenommen.

Wobei hier $f_{min} := \begin{cases} \min\{f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)\} & \text{wenn } x_0 \text{ Minimum} \\ \max\{f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)\} & \text{wenn } x_0 \text{ Maximum} \end{cases}$

(anschaulich auch gut vorstellbar).

$f(x_0)$ selbst wird in $\dot{U}_\delta(x_0)$ natürlich gar nicht, und ~~genau~~ bei x_0 genau einmal angenommen.

Sollte $f(x_0)$ ein zweites Mal angenommen werden, so gälte an der Stelle x_1, an der dies der Fall wäre, wg. Stetigkeit, dass mind. ein Wert aus $[f_{min}, f(x_0))$ nochmal (nun zum dritten Mal) angenommen würde, denn x_1 kann kein Minimum sein, ohne dass es zwischen x_0 und x_1 ein $\tilde{x}$ gäbe mit $f(x_0) = f(\tilde{x}) = f(x_1)$; und ist es kein Minimum, so ist f in einer δ-Umgebung um x_1 monoton. ↯ □ $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_0)$

richtig !

$\Rightarrow f$ kann kein Extremum haben ja.. doch lokal

$\Rightarrow f$ ist auf $\mathbb{R}$ monoton. Nein

Damit wärst du fertig

bzw. naja $Max = \infty$ $Min = -\infty$: aber wieso wird jeder Wert nicht trotzdem 2x angenommen?

$I \neq \emptyset$

Für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt: (OBdA $\#I > 1$) da einelementiges IV solche Eigenschaften wegen mehrerer Punkte nicht ermöglicht $\Rightarrow I \neq [x,x]$ $\Rightarrow \#I = \infty$ (weil $\mathbb{R}$ dicht)

Fall 1: f ist streng monoton auf I

$\Rightarrow$ jeder Wert von f wird in I genau einmal angenommen

Da f keine Extrema haben kann, können die Werte aus I nicht noch einmal in einem anderen Intervall angenommen werden ↯

Fall 2: f ist monoton auf I, aber nicht streng mon.

$\Rightarrow \exists$ Intervall $J \subset I$ s.d. $f(x) = c \quad \forall x \in J$ ($J \neq [x,x]$ wie oben)

Wie oben schon beschrieben, muss J mehr als 1 Element haben, und da die reellen Zahlen dicht sind, d.h. zwischen zwei reellen Zahlen gibt es stets eine weitere, muss J mehr als zwei Elemente haben, d.h. $f(x) = c$ wird mehr als zwei mal angenommen ↯

Also kann es keine Funktion geben, die jeden Wert $y \in \mathbb{R}$ genau zweimal annimmt.

□

~~f muss nicht~~

Naja f kann keine globalen Extrema haben, da es so ein f nicht gibt...

du schließt also erst extrema aus...

verwirrend, aber ich glaube es stimmt 3/4