Pia Malika RENZ, Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Sven GRÜTZMACHER, Mi14

Schneeflocke?

!!

1	2	3	4	5	Σ
2,5	3	0	2,5	$\frac{1}{2}$	8,5

steht da

Blatt 8

Zentralübungsaufgaben

1. *Cantorsches Diskontinuum*
Es sei U die Vereinigung aller Teilintervalle von [0,1] der Form

$$\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^{n-1} - 1$. Die Menge $P := [0,1] \backslash U$ heißt *Cantorsches Diskontinuum*. Es gilt:

a) P ist abgeschlossen und beschränkt, $P = H(P)$ und P hat keine inneren Punkte.

b) P ist nicht abzählbar oder endlich.

c) Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren abgeschlossene Intervalle $I_1, \ldots I_r$ mit $P \subset \bigcup_{j=1}^r I_j$ und $\sum_{j=1}^r |I_j| < \varepsilon$, wobei $|I|$ die Länge des Intervalls I bezeichnet.

2. Berechnen Sie:

a) $\lim_{x \to 0}(\sqrt{x+5} - \sqrt{x})$,

b) $\lim_{x \to 1^-} \lim_{n \to \infty} x^n$,

c) $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1^-} x^n$,

d) $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

e) $\lim_{x \to -1^+} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

3. **a)** Zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ x^3 + x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bestimme man die Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ für die $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Bitte wenden!

b) Untersuchen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$, ob

$$\lim_{x \to 1, x \neq 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

existiert und bestimme gegebenfalls den Grenzwert. (Die Schreibweise $\lim_{x \to 1, x \neq 1}$ ist im Sinne von Definition 9.3 mit $T = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ zu verstehen.)

Hausaufgaben

1. Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ heisst Berührpunkt der Menge A genau dann, wenn in jeder ε-Umgebung von x mindestens ein Element von A liegt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jeder Häufungspunkt der Menge A ist auch Berührpunkt von A.

b) Es kann vorkommen, dass ein Berührpunkt von A kein Häufungspunkt von A ist.

c) Jeder Berührpunkt von A, der nicht in A liegt, ist Häufungspunkt der Menge A.

2. **a)** Untersuchen Sie, ob

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

für $x_0 = 2$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ existiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{x^3 - 1}, & \text{falls } x \neq 1, \\ 0, & \text{falls } x = 1, \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ von rechts bestimmt gegen ∞ und von links gegen $-\infty$ divergiert.

3. **a)** Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational}, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

In welchen Stellen des Intervalls $[0, 1]$ ist f stetig und in welchen unstetig?

Siehe nächstes Blatt!

2a)

Ausgehend von $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)}$ (*), zeigen dass (*) $= \frac{x^4-6x^3+9x^2+4x+12}{x^3-6x^2+11x-6}$

dazu erweitern mit $\left.\begin{matrix}(x-2)\\(x-3)\end{matrix}\right\}$ Nullstellen $\frac{(x-2)(x-3)(x^2-2x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)}$

$= x^4$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$, da (*) nur auf $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ definiert ist Einschränken auf selben Def.bereich

Jetzt: Untersuchen von $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)}$ möglich:

- für $x_0 \to 2$ $\lim_{x\to x_0} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} = 0$
- für $x_0 \to 0$ $\lim_{x\to x_0} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} = 2$
- für $x_0 \to 1$ $\lim_{x\to x_0} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} = \infty$

$\exists$ $M = \sup E = \max E$ da E abgeschl.
$\exists$ $m = \inf E = \min E$ da " "

für $f: E \to E$ gilt: $m \leq f(x) \leq M$
für f $x_2 > x_1$ wächst x_n streng mon.
und ist durch M n.o.b. $\Rightarrow$ konv gg. M

b)

$f(x): \begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto f(x)\end{cases} \begin{cases}\frac{x}{x^3-1} & \text{für } x\neq 1\\ 0 & \text{für } x=1\end{cases}$

$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot x \cdot \frac{1}{x-1}$

$\lim_{x\to x_0=1} f(x) = \lim_{x\to x_0=1} \left(\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\to\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{x}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x-1}\right)$

Fallunterscheidung: $\forall$ $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty \quad \forall x > 1$

$\forall x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x\to 1} -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty$

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Zeigen Sie, dass f_n stetig ist anhand des $\varepsilon - \delta$-Kriteriums aus Übung 9.12. Das heißt: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an mit

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

4. Es sei $E \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge und $f : E \to E$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion. Zu jedem $x_1 \in E$ wird durch die Vorschrift $x_{n+1} = f(x_n)$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E definiert. Zeigen Sie:

a) Aus $x_2 > x_1$ ($x_2 = x_1$, $x_2 < x_1$) folgt $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} = x_n$, $x_{n+1} < x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Der Limes $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert und ist ein Fixpunkt von f, d.h. $f(x) = x$.

c) Im Fall $x_2 > x_1$ ist x der kleinste Fixpunkt von f, der größer als x_1 ist. Wie lautet die entsprechende Charakterisierung von x in den Fällen $x_2 = x_1$, $x_2 < x_1$?

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 14.12. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

weiter 2b)

$x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 1 \quad \forall x < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \to 1} -\infty$

3a)

- $x_n \in \mathbb{Q}$ $f(x_n) \to x$
- $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $f(x_n) \to 0$

einziger Punkt an dem alle möglichen Folgen gegen denselben Punkt konvergieren, ist für $x = 0$, dort stetig, sonst nicht

$|x^n - (x_0 - \delta)^n| < \varepsilon$

$x^n - \varepsilon < (x_0 - \delta)^n$

$\sqrt[n]{x^n - \varepsilon} < x_0 - \delta$

$\delta < x_0 - \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon}$

b)

(1) ungerade n: wegen Monotonie gilt:

$(x_0 + \delta)^n - x_0^n < \varepsilon$

$(x_0 + \delta)^n < \varepsilon + x_0^n$

$x_0 + \delta < \sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n}$

$\delta < \sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} - x_0$ (obere Schranke)

und:

(2) obere $|(x_0 - \delta)^n - x_0| < \varepsilon$

$x_0^n - (x_0 - \delta)^n < \varepsilon$

$-(x_0 - \delta)^n < \varepsilon - x_0^n$

$(x_0 - \delta)^n > x_0^n - \varepsilon$

$x_0 - \delta > \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon}$

$-\delta > \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon} - x_0$

$\delta < x_0 - \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon}$

$\delta :=$

$\delta = |x_0 - \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon}|$

$\delta := \min [x_0 - \sqrt[n]{x_0^n - \varepsilon}, \sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} - x_0]$

3a)

$$f: \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{Q}$ ist $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$, an dem alle möglichen Folgen gegen denselben Wert konvergieren

$\Rightarrow$ einziges $x \in [0,1]$
ist $x = 0$, dort ist f stetig, sonst nicht. (~~Da~~ folgt aus Satz 4.18)

b)

$$f_n: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

Wegen Monotonie kann man

(1) $\varepsilon > (x_0^n - \delta)^n - x_0^n$

$\varepsilon + x_0^n > (x_0^n - \delta)^n$

$\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} > x_0^n - \delta$

$\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} - x_0^n > \delta$

(2) $\varepsilon > |x^n - (x_0 - \delta)^n|$

$x^n - \varepsilon > (x_0 - \delta)^n$

$\sqrt[n]{x^n - \varepsilon} > x_0 - \delta$

$x_0 - \sqrt[n]{x^n - \varepsilon} > \delta$

$\Rightarrow \delta := \min\left[\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} - x_0^n,\ x_0^n - \sqrt[n]{x^n - \varepsilon}\right]$

4a)

eigtl. mit Induktion:

~~IA~~: $n = 1$ $\quad x_2 = f(x_1)$

aus $x_2 > x_1$ folgt $f(x_2) > f(x_1)$

$\Rightarrow x_3 > x_2$ usw.

aus $x_2 = x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

$\Rightarrow x_3 = x_2$ etc.

aus $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$\Rightarrow x_3 < x_2$. q.e.d.

$n = 1$ $\quad x_2 := f(x_1)$

aus $x_2 > x_1$, $x_2 = x_1$, $x_2 < x_1$ folgt $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_3 > x_2$

IS $\quad n+1$

$x_n > x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) > f(x_{n+1}) \Rightarrow f(x_{n+1})$

$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 4x$

$+x^3 - 3x^2 - 2x - 3x^2 + 6x + 6$

$-2x^3$

$\dfrac{(x-2)(x-3)(x^2-2x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)}$

$(x-2)(x^3 - 2x^2 - 2x - 3x^2 + 6x + 6)$

$(+x^3 - 5x^2 + 4x + 6)$

$+x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6x - 2x^3 + 10x^2 - 8x - 12$

$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 2x - 12$

Analysis-Übungszettel 8

1a)

$x \in H(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ x ist Berührpunkt

✓

b)

Es gelte $\Rightarrow \forall \tilde{\varepsilon} > \varepsilon > 0$ (mit festem $\tilde{\varepsilon}$)

wofür das $\tilde{\varepsilon}$? 0

$U_\varepsilon(x) \cap A = \{x\} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin H(A)$

x ist Berührpunkt

$\Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(x) = \emptyset$

etwas sehr zu kurz ... "isolierter Pkt"

$\Leftrightarrow x \notin H(A)$ ✓

$-\frac{1}{2}$

c)

$x \notin A \Rightarrow x \notin (U_\varepsilon(x) \cap A) \quad \forall x \notin A$, x sei BP.

$\Rightarrow x \in \dot{U}_\varepsilon(x) \cap A$

zu kurz! Sieht nicht einmal wie ein Beweis aus! -1

$2{,}5/4$

Nr. 2a)

Ausgehen von $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} =: g(x)$

- zeigen, dass $g(x) = f(x) := \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x + 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ indem man

mit $\left.\begin{array}{l}(x-2)\\(x-3)\end{array}\right\}$ aus Nullstellen gefunden

erweitert:

$$\frac{(x-2)(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-1)} = \frac{(x-2)(x-3)(x^2-2x-2)}{(x-2)(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 - 5x^3 + 5x^2 + 10x + 6x^2 - 6x - 12}{x^3 - 6x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6}$$

$$= \frac{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

Wir können also für den Limes statt $f(x)$ die einfachere Funktion $g(x)$ betrachten, zumindest $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ da $g(x)$ nur hier definiert ist.

bei $x \in \{2, 3\}$ auch definiert!

$-\frac{1}{2}$

· für $x_0 \neq 2$: $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} = 0$

· für $x_0 = 0$: $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)} = 2$

· für $x_0 = 1$: $\lim g(x) \xrightarrow{x \to x_0} \infty$

alles etwas sehr kurz! $-\frac{1}{2}$

Nr. 2b)

$f(x): \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \begin{cases} \frac{x}{x^3-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases} \end{cases}$

Zerlegung: $\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot x \cdot \frac{1}{x-1}$

$x_0 = 1$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\to \frac{1}{3}} \cdot \underbrace{x}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x-1} \right)$

noch zu betrachten: $\lim \frac{1}{x-1}$

Fallunterscheidung:

- $\forall x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} > 0$

  $\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty \quad \forall x > 1$

- $\forall x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0$

  $\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \forall x < 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$

3/4 ✓

Nr. 3a)

$f: \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{Q}$ ist $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$

$\Rightarrow$ einziges $x \in [0,1]$ an dem alle denkbaren Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren ist $x = 0$. Dort ist $f(x)$ dann auch stetig sonst nicht; folgt aus Satz 4.18

-.- -2

Beweis und so?

Nr. 3b)

$f_n: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$

Beträge! auf Vorzeichen aufpassen!

Wegen Monotonie d. Funktion ist

(1) $\varepsilon > (x_0^n - \delta)^n - x_0^n$ (2) $\varepsilon > |x^n - (x_0 - \delta)^n|$??

$\varepsilon + x_0^n > (x_0^n - \delta)^n$! $x^n - \varepsilon > (x_0 - \delta)^n$

$\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} > x_0^n - \delta$ $\varepsilon = ?$ $\sqrt[n]{x^n - \varepsilon} > x_0 - \delta$

$\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n} - x_0^n > \delta$ $x_0 - \sqrt[n]{x^n - \varepsilon} > \delta$

$\Rightarrow \delta := \min[\sqrt[n]{\varepsilon + x_0^n}, x_0^n - \sqrt[n]{x^n - \varepsilon}]$ $\forall \varepsilon > 0$

Sry, aber so geht das nicht $\frac{0}{4}$

Nr. 4a)

Aus $\left.\begin{array}{l} x_2 > x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_2 < x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_2) > f(x_1) \\ f(x_2) = f(x_1) \\ f(x_2) < f(x_1) \end{array}\right\}$ wegen $x_3 := f(x_2)$ und $x_2 := f(x_1)$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x_3 > x_2 \\ x_3 = x_2 \\ x_3 < x_2 \end{array}$

etc. [setzt sich unendlich so fort da allg.

$x_n > x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) > f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$ und analog mit „=" und „<"] oh Leute... aber ja

b)

· für $x_{n+1} > x_n$ ist der limes eine obere Schranke:

$\exists\ M = \sup E = \max E$ (da E beschränkt)

$\exists\ m = \inf E = \min E$

für $f: E \to E$ gilt: $m \leq f(x) \leq M$

und da ~~$x_{n+1} > x_n$~~ $x_2 > x_1$ ist, ist x_n streng monoton wachsend und ist nach Def. durch M beschränkt, die Folge konvergiert gegen M $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$ mit $f(M) = M$

· für $x_{n+1} = x_n$ ist die Folge konstant, d.h. ~~der limes $x \to$~~

$x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ mit $f(x) = x$

· für $x_2 < x_1$ ist die Folge streng monoton fallend und durch m nach unten beschränkt

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = m$ mit $f(m) = m$ ✓

(ı)

· Im Fall $x_2 = x_1$ ist x konstant und Fixpunkt ✓

· Im Fall $x_2 < x_1$ ist x der größte Fixpunkt von f, der ~~größer~~ kleiner als x_1 ist

−1,5

2,5/4

5. Ein Gedicht.

+1/2

Epsilon und Delta für die Stetigkeit,
Die Funktionen streben zur Unendlichkeit,
Aufgaben induzieren Grösstverwirrtheit,
Uns kosten die Blätter immer zu viel Zeit.

Doch ihr tapf'ren Recken,
es gilt neuen Elan zu erwecken!
Lasst ertönen des Stiftes Klang
in eurem schieren Wissensdrang!

Denn wenn zuletzt
das Quadrat ihr setzt
der Beweis da steht
und ihr ihn seht

DANN merkt ihr just
GELOHNT hat sich der FRUST!

Frohe Weihnachten