Pia Malika RENZ
Jannis Andrija SCHNITZER

Gruppe: Sven GRÜTZMACHER, MI14

Prof. Dr. Mark Podolskij | Analysis I | Wintersemester 2011/12

Blatt 7

1	2	3	4	Σ
3	3,5	4	2,5	13

Zentralübungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$,

b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{6^n}$.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n}$.

2. **a)** (*Ungleichung von Cauchy-Schwarz*)
Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

b) Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ absolut.

3. Zeigen Sie, dass die Doppelreihe $\sum_{j,k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Wert.

Hausaufgaben

1. **a)** Beweisen Sie das Quotientenkriterium (Konvergenzkriterium 7.11 (b)) für die Konvergenz von Reihen.

Bitte wenden!

$a_n < a_{n-1}$

$a_{n+1} < a_n$

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$a_n + a_n + \dots + a_n$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

$\sum (na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{k}}$

2. Es sei $a_0 := 0$ und $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ für $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist, aber nicht absolut konvergiert.

Minorante $\frac{1}{k}$

b) Untersuchen Sie das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit sich selbst auf Konvergenz.

3. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$.

b) $\overline{A^\circ} = A$, falls A abgeschlossen ist.

Gegenbsp.

$\sum \frac{1}{k}$

$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$

c) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$x \in ((A \cap B) \cup H(A \cap B))$

4. Bestimmen Sie zu den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die Häufungswerte der Folge und die Häufungspunkte der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

a) $a_n = (-1)^n$,

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,

x ist HP $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$

c) $a_n = n - 2^{k_n}$, wobei $k_n = \max\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \leq n\}$.

$H(\mathbb{Z}) = \emptyset$

$0, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 8,$

$M \subset \mathbb{Z} \Rightarrow H(M) = \emptyset$

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 7.12. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

$\mathbb{N}^\circ =: M$ $\qquad U_{\varepsilon'}(x) \subset U_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon' < \varepsilon$

$x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ$

$\Leftrightarrow$

x ist innerer Punkt von A $\wedge$ x ist innerer Punkt von B

$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A \vee \exists \varepsilon' > 0 : U_{\varepsilon'}(x) \subset B$

$\Rightarrow \exists \tilde{\varepsilon} := \min\{\varepsilon, \varepsilon'\} : U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subset A \wedge U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subset B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)^\circ$

$U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subset (A \cap B) \Rightarrow$

$x \in (A \cap B)^\circ$

$\Leftrightarrow$

$x \in (A \cap B)^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset (A \cap B)$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A \wedge U_\varepsilon(x) \subset B$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A) \wedge (\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset B)$

$\Rightarrow x \in A^\circ \wedge x \in B^\circ$

$\Rightarrow x \in (A^\circ \cap B^\circ)$ $\boxed{\smile}$

$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

x 1. Fall $x \in A \cap B \Rightarrow$

$x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cup H(A) \wedge x \in B \cup H(B)$

Schale zur Kartoffel hinzufügen

$x \in \overline{A \cap B} \overset{!}{\Rightarrow} x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$ 2. Fall analog

$\forall \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists y \in \dot{U}_\varepsilon(x) \cap (A \cap B)$

$x \in (A \cap B) \cup H(A \cap B)$

$\Rightarrow \exists y : y \in \dot{U}_\varepsilon(x) \wedge y \in A \cap B$

$\Rightarrow y \in \dot{U}_\varepsilon(x) \wedge y \in A \wedge y \in B$

$x \in (A \cap B) \vee$ x ist Häufungspunkt von $A \cap B$

$\Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge$

$\dot{U}_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$

$(x \in A \wedge x \in B) \vee x$ ist HP von $A \cap B$

$\Rightarrow x \in H(A) \wedge$

$x \in H(B)$

$\cancel{x}$ $(x \in A \wedge x \in B) \vee \underline{(x \in H(A) \wedge x \in H(B))}$

$\Rightarrow x \in H(A) \cap H(B)$

Analysis 1, Blatt 7.

1. (a) Zz: (i) Wenn $q :=$ lim sup $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1}\right|$$

$$= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_3}{a_2}\right| \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right|$$

$$\leq q^n$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert (geometrische Reihe) $\overset{\text{Majorantenkrit.}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|$ konvergiert

$\Rightarrow |a_1| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. ✓

(ii) Zz: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n| \Rightarrow |a_n|$ mon $\nearrow$,

also a_n mon $\nearrow$ bis auf das Vorzeichen $\Rightarrow a_n$

kann keine Nullfolge sein $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann nicht konvergent sein. ✓ □

(b) Betrachte $|S_{2n} - S_n| = |(S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n) + (\lim_{n\to\infty} S_n - S_n)|$

Was ist S_n? $-\frac{1}{2}$ ...

$$\leq |S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n| + |S_n - \lim_{n\to\infty} S_n| \quad (*)$$

Da $\lim_{n\to\infty} S_n$ existieren muss (weil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$), hat

auch jede Teilfolge von S_n den Grenzwert $\lim(S_n)$.

Somit geht $(*)$ gegen 0 für grosse n.

Betrachte nun $(n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teilfolge $(2n a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$: $2n a_{2n} = 2 \cdot (\overbrace{a_{2n} + \ldots + a_{2n}}^{n\text{-mal}})$

Wieso? $-\frac{1}{2}$ ~~sonst tut es nicht~~ $\leq$

$$|a_{2n} + \ldots + a_{2n}| < |a_{n+1} + \ldots + a_{2n}| = |S_{2n} - S_n|$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |a_{2n} + \ldots + a_{2n}| < 2 \cdot |a_{n+1} + \ldots + a_{2n}| \leq 2 |S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n| + 2 \cdot |S_n - \lim_{n\to\infty} S_n|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2 \cdot |a_{2n} + \ldots + a_{2n}| \leq 2 \cdot \lim_{n\to\infty} |S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n| + 2 \cdot \lim_{n\to\infty} |S_n - \lim_{n\to\infty} S_n| = 0.$$

Da a_n mon. $\searrow$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, muss $a_n \geq 0$ gelten. Somit $0 \leq \lim_{n\to\infty} 2n a_{2n} \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(2n a_{2n}) = 0$

Da (a_n) mon. fallend und $\lim_{n\to\infty} = 0$:

$(2n+1)a_{2n+1} = 2n \cdot a_{2n+1} + a_{2n+1}$

weil $a_{2n+1} \leq a_{2n}$:

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(2n \cdot a_{2n+1} + a_{2n+1}) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(2n a_{2n+1})}_{\boxed{\leq \lim_{n\to\infty}(2n a_{2n}), \geq 0 \Rightarrow = 0}} + \overbrace{\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1})}^{=\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0}$

$= 0$

3/4

Da die Teilfolge $(2n a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((2n+1)a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ zusammen $(n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergeben und der limes beider TF $= 0$, ist auch $(n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

2. a) Nach 7.13 zz: (i) $a_n a_{n+1} < 0$ (iii) $|a_n|$ mon. ↘

(ii) $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(i): $a_n a_{n+1} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{1} \cdot (-1)}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(-1)}{\sqrt{n(n+1)}} < 0$.

(ii) $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $\sqrt{n}$ mon. steigend ~~unbeschränkt~~

(iii) $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist mon. ↘, da $\sqrt{n}$ mon. steigend

$\Rightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ □

Absolute Konvergenz:

$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}$, da $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ und $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent $\overset{\text{Minorante}}{\Longrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ist divergent. □

b) Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht abs. konv., darf ich eigentlich per def. kein Cauchy-Produkt bilden. Mache ich es trotzdem, passiert das:

falsch, darf man!

$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot a_{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j-1} \cdot (-1)^{n-j-1}}{\sqrt{nj - j^2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-2} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{nj - j^2}}}$

Achtung

$-\frac{1}{2}$ $j = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{0}}$!!

Betrachte das als $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ müsste eine Nullfolge sein, damit "Cauchy-Prod" konv.

$|b_n|$ wächst monoton, da $\frac{1}{\sqrt{nj - j^2}} > 0$, somit $\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{nj - j^2}} > \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{nj - j^2}}$

$\Leftrightarrow$ ~~$\frac{1}{\sqrt{(n+1)j - j^2}}$~~ $\frac{1}{\sqrt{n(n+1) - (n+1)^2}} > 0$.

Somit kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein $\Rightarrow$ Das "Cauchy-Produkt" divergiert.

3,5/4

3. a) Annahme: Aussage gelte

Setze $A := [x,y]$, $B := [y,z]$ für $x<y<z$; $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$A^\circ = (x,y)$; $B^\circ = (y,z)$; $A \cup B = [x,z]$; $(A\cup B)^\circ = (x,z)$

$(x,y) \cup (y,z) = (x,z)\setminus\{y\} \overset{!}{=} (x,z)$ ↯ Widerspruch $\Rightarrow$ Aussage gilt nicht. □

b) Annahme: Aussage gelte;

Setze $A = \{x\}$ für ein $x \in \mathbb{R}$.
A ist offensichtlich abgeschlossen, denn
$\mathbb{R}\setminus A = (-\infty, x) \cup (x, \infty)$ ist offensichtlich offen
$A^\circ = \emptyset$, da es keine ε-Umgebungen in A gibt.
$\Rightarrow \overline{A^\circ} = \emptyset \neq A$ ↯ $\Rightarrow$ Aussage ist falsch □

c) $A^\circ \cap B^\circ \overset{!}{=} (A\cap B)^\circ$ Spezialfall: Eine der Mengen (oder beide) $= \emptyset$
$\emptyset = A^\circ \cap \emptyset \overset{!}{=} (A \cap \emptyset)^\circ = \emptyset$ ✓ Gut

"$\subset$": $x \in (A^\circ \cap B^\circ) \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A \;\wedge\; \exists\, \varepsilon' > 0 : U_{\varepsilon'}(x) \subset B$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \varepsilon') : U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset A \;\wedge\; U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset B \Leftrightarrow U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset (A \cap B)$

Super

$\Rightarrow x \in (A\cap B)^\circ$

Gegenrichtung "$\supset$": $x \in (A\cap B)^\circ \Rightarrow \exists\, \tilde\varepsilon > 0 : U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset (A \cap B)$

$\Rightarrow \exists\, \tilde\varepsilon > 0 : U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset A \;\wedge\; U_{\tilde\varepsilon}(x) \subset B$

$\Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$ □

d) Eine Menge $= \emptyset$: $\overline{A \cap \emptyset} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ gilt immer. (Analog für die andere oder beide.)

$x \in \overline{A\cap B} \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup H(A\cap B)$

Fallunterscheidung 1. $x \in (A\cap B) \Rightarrow x \in A \;\wedge\; x \in B \Rightarrow x \in A \cup H(A) \;\wedge\; x \in B \cup H(B)$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2. $x \in H(A\cap B) \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(x) \cap (A\cap B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\wedge\; \dot{U}_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in H(A) \;\wedge\; x \in H(B) \Rightarrow$ ~~$x \in A \cup H(A) \cap B \cup H(B)$~~

$\Rightarrow x \in H(A) \cup A \;\wedge\; x \in H(B) \cup B$

$\Rightarrow x \in (H(A) \cup A) \cap (H(B) \cup B) \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ □

4/4

4. a) $a_n = (-1)^n$; aus Zerlegung in TF a_{2n} und a_{2n+1} ergeben sich die HW $\{1, -1\}$ ✓

Da a_n immer 1 oder −1 wird, ist $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$. Diese Menge enthält keine ε-Umgebung von 1 oder −1 für $\varepsilon < 2$; somit keine Häufungspunkte. ... Sehr knapp

b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Zerlegung genügt

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{n} \qquad a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1 \; ; \; \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1 \Rightarrow M_{HW} = \{-1, 1\}$$

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ enthält zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $U_\varepsilon(x)$ für $x \in M_{HW}$, denn es enthält $x + \frac{1}{n_0}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ nach Archimed. Eigenschaft.

$\Rightarrow$ −1 und 1 sind HP. gibt es weitere? $-\frac{1}{2}$

c) $a_n = n - 2^{k_n}$ mit $k_n = \max\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \leq n\}$

Diese Vorschrift ist für $n = 1$ nicht definiert, da $\nexists m \in \mathbb{N} : 2^m \leq 1$. Angenommen, $\mathbb{N}^0$ wäre gemeint gewesen:

$$k_n = \max\{m \in \mathbb{N}^0 \mid 2^m \leq n\}$$

n? a_n? irgendwie nicht ... bzw was wollt ihr damit zeigen $-\frac{1}{2}$

Dann ist n ~~a_n~~ offensichtlich immer zwischen 2^{k_n} und $2 \cdot 2^{k_n}$ ($2^{k_n} \leq n < 2 \cdot 2^{k_n}$), da ~~für~~ $n \geq 2 \cdot 2^{k_n}$ $k_n = k+1$ gälte (per definitionem).
$\Rightarrow n - 2^{k_n} < 2 \cdot 2^{k_n} - 2^{k_n} = 2^{k_n}$. Da 2^{k_n} nicht nach oben beschränkt ist, werden für ~~gross~~ wachsendes n alle $\mathbb{N}^0$ getroffen (sonst nichts, da keine negativen oder nicht-ganzen Zahlen involviert sind). Für den Übergang $k_n \to k_{n+1}$, der immer stattfindet, wenn $n = 2 \cdot 2^{k_n}$ gilt, werden die Werte der Folge stets 0 zu $2^{k_n} - 1$. Somit wird jeder Wert unendlich oft getroffen $\Rightarrow M_{HW}(a_n) = \mathbb{N}^0$.

etwas wirr ... $-\frac{1}{2}$ aber die Idee stimmt

Da lt. Vorlesung $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \Rightarrow H(\mathbb{Z}) = \emptyset$ und $\mathbb{N}^0 \subset \mathbb{Z}$: $H(\mathbb{N}^0) = \emptyset$
$\Rightarrow$ alle Zahlen aus $\mathbb{N}^0$ sind Häufungswerte, aber es gibt keine Häufungspunkte.

✓

2,5/4