Jannis Andrija Schnitzer , Gruppe 14^{00}
Melika Renz

Prof. Dr. Mark Podolskij — Analysis I — Wintersemester 2011/12

Blatt 6

1	2	3	4	Σ

Zentralübungsaufgaben

1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

2. Bestimmen Sie die Häufungswerte der durch

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = (1-a_n)^2$$

rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. **a)** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $q \in [0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| \le q|a_n - a_{n-1}| \quad \text{für} \quad n \ge n_0.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert.

b) Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Kontraktion*, wenn ein $q \in [0,1)$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \le q|x-y| \quad \text{für} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Es gibt genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = x^*$, und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = x^*$ für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Typs $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = f(a_n)$.

Hausaufgaben

1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

n k 4 u

Bitte wenden!

2. Es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge.

a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

b) Es seien $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_{n_k} - a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert.

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

$\sum_{k=1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$ ✓

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^n}^{>0 \text{ für } n \text{ gerade}}}{\underbrace{n+\sqrt{n}}_{>0}}$.

$\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\right|$ fällt monoton

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n}{4}\right)^n$.

$n+n \geq n+\sqrt{n}$

$\frac{1}{n+n} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

$\frac{1}{2n} \quad \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 30.11. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

Ana-Übungszettel 6

1	2	3	4	Σ
3	4	~~2,5~~ 3,5	3,5	14

6.1

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \beta := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ $\beta = \infty$ auch mögl.!

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta \quad \forall n \geq n_0$.

Wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\prod\limits_{n=m}^{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{\leq} \prod\limits_{n=m}^{n-1} \beta$

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_m} \leq \beta^{n-m}$ Wieso? zu kurz! $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n \leq \beta^{n-m} \cdot a_m \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \beta^{1-\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[n]{a_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ldots$?? ?

?? $\rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$ $\left[\text{da } \sqrt[n]{a_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \& \ \frac{m}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right]$

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ zu knapp teils $\frac{3}{4}$ □

6.2

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge $\overset{(6.8)}{\Longleftrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \liminf\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \exists!$ Häufungswert und dieser ist der Grenzwert. □

.. sehr spartanisch meine liebe!!

b) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den Grenzwert dieser Folge (Satz 5.7(i))

$a = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{k\to\infty} (a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left((a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - (a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} - \lim\limits_{k\to\infty} (a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$= a - a = 0$ □

✓ $\frac{4}{4}$

6.3

a)

$\frac{1}{8} < \frac{1}{2}n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [n=1]$

$\Rightarrow \frac{1}{8} + n^2 < \frac{1}{2}n + n^2$

$\Rightarrow n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8} < n^2 + n$

$\Rightarrow (n + \frac{1}{4})^2 < n(n+1)$

$\Rightarrow n + \frac{1}{4} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n(n+1)}$ [Wurzel darf man hier ziehen, alles größer 0]

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4n} < \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

$\Rightarrow \frac{1}{4n} < \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ divergiert $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ divergiert (Minoranten-kriterium)

~~[illegible]~~

b)

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right)$

wieso? $-\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \right)$

$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow S_n$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert gegen $\frac{1}{4}$

c)

$a_n = \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}$

$|a_n| = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ ist monoton fallend, da: $n + \sqrt{n} < n + 1 + \sqrt{n+1}$

$\frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}$

$|a_n| > |a_{n+1}|$

und $\lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} = 0 \xRightarrow{(7.13)}$ Die Reihe ist konvergent.

$n + n \geq \sqrt{n} + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + n}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ ist Minorante und divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$ ist divergent, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$ ist

nicht absolut konvergent $\square$

$3{,}5/4$

6.4

a) [Wurzelkriterium]

$$= (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 = 0 < 1$$

Spezialisierter Kurz $-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \text{ konvergiert}$$

b) [Quotientenkriterium]

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n}{4}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{(n+2)} \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right) = \frac{1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{4}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1} e \cdot \frac{1}{4} = \frac{e}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

✓

$3{,}5/4$