Malika Renz, Jannis Andrija Schnitzer
Tutor: Sven Grützmacher / Mi. 14

Analysis I, Übungsblatt 5

1	2	3	4	Σ
3,5	3,5	3,5	3,5	14

~~xxxx~~ Aufgabe 1.

a) $x \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: \quad a_n = n^p \cdot x^n.$$

a. Für $x < 1$; zunächst $x > 0$

Monotonie $\frac{n^p x^n}{(n+1)^p x^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \frac{1}{x} \overset{!}{>} 1 \quad (\text{mon. fallend})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \overset{!}{>} x$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \overset{!}{>} \sqrt[p]{x}$$

Da $x<1$, ist auch $\sqrt[p]{x} < 1$.

$\frac{n}{n+1}$ konvergiert nach VL 5.13 gegen 1.

Damit $\exists n_1$ s.d. $\frac{n_1}{n_1+1} > \sqrt[p]{x}$. Somit ist a_n für $x>0$ monoton fallend.

$x=0$ ist trivial.

Für $x<0$:

Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, die wegen $((-x))^{2k} = ((+x))^{2k}$ äquivalent zur obigen ist.

Zur Vollständigkeit fehlt die TF $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$:

$$a_{2k+1} = (2k+1)^n \cdot x^{2k+1}$$

Zeige nun: Diese TF ~~kann~~ ist für $x<0$ monoton steigend.

Betrachte $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k+3}} \overset{!}{>} 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(2k+1)^p \, x^{2k+1}}{(2k+3)^p \, x^{2k+3}} \overset{!}{>} 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2k+1}{2k+3}\right)^p \cdot \frac{1}{x^2} \overset{!}{>} 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+1}{2k+3} \overset{!}{>} \sqrt[p]{x^2} \quad (\text{erlaubt, da } x^2 \text{ immer } \geq 0)$$

Da $|x|<1$ gilt $x^2<1$ und somit $\sqrt[p]{x^2} < 1$.

Wie oben konvergiert $\frac{2k+1}{2k+3}$ gegen 1, damit gibt es ein k_1, ab dem Monotonie gilt.

Diese Teilfolge ist durch 0 nach oben beschränkt, da gilt:

$$\underbrace{(2k+1)^p}_{>0} \cdot \underbrace{x^{2k}}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{<0} < 0 \quad (k, p \in \mathbb{N}, |x|<1, x<0).$$

Die zuerst betrachtete Folge ist durch 0 nach unten beschränkt, da gilt:

$$\underbrace{n^p}_{>0} \underbrace{x^n}_{>0} > 0 \text{ mit } n, p \in \mathbb{N}, \ |x| < 1, \ x > 0.$$

Konvergiert es jetzt? und wenn ja gegen? $-\frac{1}{2}$

Für $|x| > 1$: $\lim_{n\to\infty} n^p = \prod_{k=1}^{p} \lim n$ ~~[illegible]~~ $= \infty$

$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ für $|x| > 1$ (~~[illegible]~~ es gibt keine obere Schranke für $x^n > 1$ bzw. keine untere für $x^n < -1$; und $\frac{x^n}{x^{n+1}}$ ist stets $\frac{1}{x}$, was für $x > 1$ kleiner als 1 ist $\Rightarrow$ monoton st.; für $x < -1$ ist es ~~grösser als 1 und~~ somit monoton fallend, da negativ.

$3/\frac{5}{4}$

2. Beweis in 4 Schritten (analog zu VL 5.18)

$[a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$ soll IV-Schachtelung sein

(1) zz: $a_n \leq b_n$

Induktionsanfang: $n = 1 \Rightarrow a \overset{!}{\leq} b$

(a, b sind nicht näher bestimmt und müssen daher so gewählt werden)

nein...

IV: $a_n \leq b_n \rightarrow$ IS: $n \rightarrow n+1$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

~~$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n} \overset{IV}{\leq} \frac{2b_n^2}{a_n b_n} \leq \frac{2b_n^2}{a_n^2} \ldots 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$~~

so, Ja!

Betrachte $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} =$ ~~[illegible]~~

$$\frac{a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2}{2(a_n + b_n)} - \frac{4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} =$$

$$\frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2a_n + b_n} \geq 0, \text{ da } a_n, b_n > 0. \ \square$$

(2) zz: a_n wächst monoton

Betrachte $a_{n+1} - a_n$: $\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n = \frac{2a_n b_n - a_n^2 - a_n b_n}{a_n + b_n}$

$$= \frac{a_n b_n - a_n^2}{a_n + b_n}$$

$$= \frac{a_n(b_n - a_n)}{a_n + b_n} \geq 0, \text{ da } b_n \geq a_n \ \square$$

(3) zz: b_n fällt monoton

Betrachte $b_{n+1} - b_n$: $\frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n + b_n - 2b_n}{2} = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$, da $a_n \leq b_n \ \square$

(4) Z.z.: $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

Da b_n monoton fällt und $b_n > 0$: $\exists\, b' = \lim_{n\to\infty} b_n$ ($b_n > 0$, da b_{n+1} das VZ nicht verändert und bei $b_1 = b > 0$ beginnt.)

Da a_n mon. steigt und $a_n \le b_n$ und b_n immer nach unten beschränkt: $\exists\, a' = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$\Rightarrow \frac{a'+b'}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} b_n = b'$$

$$\Rightarrow a' = b' \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \quad \square$$

✓

Nun z.z.: $\sqrt{ab} \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeige $a_n \le \sqrt{ab}$ und $\sqrt{ab} \le b_n$

$a_1 = \sqrt{a^2} \le \sqrt{ab}$, da $b \ge a$. $\sqrt{ab} \le \sqrt{b^2} = b_1$, da $a \le b$.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n} \overset{!}{\le} \sqrt{ab}$$

Zeige zunächst, dass $a_n \cdot b_n = a \cdot b\ \forall n \in \mathbb{N}$

IA: $n=1$ $a\cdot b = a \cdot b$ ✓

IV: Sei nun $a_n \cdot b_n = a \cdot b$ Z.z.: $a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a \cdot b$

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n+b_n} \cdot \frac{a_n+b_n}{2} = a_n b_n \overset{IV}{=} a \cdot b \quad \square$$

Damit: $\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \overset{!}{\le} \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow \frac{2ab}{a_n+b_n} \overset{!}{\le} \sqrt{ab} \quad |\ ()^2$

$\Leftrightarrow \frac{2ab \cdot 2ab}{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2} \overset{!}{\le} a \cdot b$

$\Leftrightarrow \frac{4ab}{a_n^2+2ab+b_n^2} \overset{!}{\le} 1$

$\Leftrightarrow 4ab \le a_n^2 + 2ab + b_n^2 \quad |-4ab$

$\Leftrightarrow 0 \le a_n^2 - 2ab + b_n^2$

$\Leftrightarrow 0 \le a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2$

$\Leftrightarrow 0 \le (a_n - b_n)^2 \quad \square$

$\sqrt{ab} \overset{!}{\le} b_n = \frac{a_n+b_n}{2} \quad |\ ()^2$

$\Leftrightarrow ab \overset{!}{\le} \frac{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2}{4}$

$\Leftrightarrow 4ab \overset{!}{\le} a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2$

$\Leftrightarrow 0 \overset{!}{\le} a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2$

$\Leftrightarrow 0 \overset{!}{\le} (a_n - b_n)^2 \quad \square$

$\Rightarrow ?$

... $-\frac{1}{2}$

$3{,}5/4$

3. a) $a_n = (1+(-1)^n) \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Zunächst HW:

a_n kann aufgeteilt werden in die Teilfolgen $(k \in \mathbb{N})$

a_{2k} und a_{2k+1}. $(n \to 2k, 2k+1)$

$$a_{2k+1} = (1+(-1)^{2k} \cdot (-1)) \cdot (-1)^{\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}}$$
$$= \underbrace{(1+(1)\cdot(-1))} \cdot (-1)^{\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}}$$
$$= 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$$

a_{2k} lässt sich aufteilen in die TF $(l \in \mathbb{N})$

$a_{2\cdot(2l)}$ und $a_{2(2l+1)}$ $(k \to 2l, 2l+1)$

$$a_{2\cdot(2l)} = a_{4l} = (1+(-1)^{4l}) \cdot (-1)^{\frac{(4l)(4l+1)}{2}}$$
$$\overset{!}{=} (1+1) \cdot (-1)^{(2l)\cdot(4l+1)}$$
$$= 2 \cdot ((-1)^{2l})^{4l+1}$$
$$= 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \lim_{l\to\infty} a_{4l} = 2$$

$$a_{2\cdot(2l+1)} = a_{4l+2} = (1+(-1)^{4l+2}) \cdot (-1)^{\frac{(4l+2)(4l+3)}{2}}$$
$$\overset{!}{=} 2 \cdot (-1)^{\frac{2}{2}(2l+1)(4l+3)}$$
$$= 2 \cdot (-1)^{8l^2+10l+3}$$
$$= 2 \cdot (-1)^{2(4l^2+5l+1)} \cdot (-1)$$
$$= -2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{4l+2} = -2$$

$\Rightarrow M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist HW von } a_n\}$
$= \{-2, 0, 2\}$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = -2$; $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$

b) $b_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$

HW: Aufspaltung in TF b_{2k} und b_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$

$$b_{2k} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{6k} = \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{VL\ 5.13\ (iii)}{=} e\sqrt{e}$$

$$b_{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{4k+2}\right)^{6k+3}$$

Setze $l := 2k+1 \Rightarrow b_l = \left(\frac{2l-1}{2l}\right)^{3l}$

Setze $z = 2l-1 \Rightarrow b_l = \left(\frac{z}{z+1}\right)^{3l}$ invertieren des Bruchs

$$= \left(\frac{z+1}{z}\right)^{-3l}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-3l}$$

$$3l = \frac{3}{2}(z+1) = \frac{3}{2}z + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b_l = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-\frac{3}{2}z + \frac{3}{2}}$$

Z oder 2

unklar...

$-\frac{1}{2}$

$$= \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-z - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z} \cdot \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{2}}}_{1 \text{ für } z \to \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} b_{2k+1} = \frac{1}{e\sqrt{e}} \cdot 1 = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow M = \left\{\frac{1}{e\sqrt{e}}, e\sqrt{e}\right\}$$

$3{,}5/4$

4.

$$a_n = \begin{cases} 2 + \frac{n}{n+1} & \text{für } n \equiv 2 \bmod 3 \\ 1 + \frac{1}{2^{n-1}} & \text{für } n \equiv 1 \bmod 3 \\ 2 & \text{für } n \equiv 0 \bmod 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{3k} = 2 \qquad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{3k} = 2$

$a_{3k+1} = \frac{1}{2^{3k}} + 1 \qquad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = 1$

$a_{3k+2} = 2 + \frac{3k+2}{3k+3} \qquad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = 3$

nach 5.13 ii

etwas sehr knapp $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = 1; \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 3$

$a_{3k+1} = 2$ für $k=0$
$a_{3k+2} = 4$ für $k=0$

$a_{3k} = 2$ für $k=1$.

Monotonie: ~~a_{3k+1}: $2+\frac{3k+2}{3k+1}$ in Rel. zu $2+\frac{3k+3}{3k+2}$~~

~~z.z.: $2+\frac{3k+2}{3k+1} \overset{!}{\geq} 2+\frac{3k+3}{3k+2}$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{3k+2}{3k+1} \overset{!}{\geq} \frac{3k+3}{3k+2}$~~

~~$\Leftrightarrow (3k+2)^2 \overset{!}{\geq} (3k+1)(3k+3)$~~

~~$\Leftrightarrow 9k^2+6k+4 \overset{!}{\geq} 9k^2+$~~

~~$\Leftrightarrow$~~

a_{3k+2}: $2+\frac{n}{n-1}$ in Rel. zu $2+\frac{n+1}{n}$

z.z.: $2+\frac{n}{n-1} \geq 2+\frac{n+1}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}$ $\Leftrightarrow$ schön $n^2 \geq (n+1)(n-1)$

$\Leftrightarrow n^2 \geq n^2-1$ ✓

$\Rightarrow$ a_{3k+2} ist monoton fallend.

$a_{3k+1} = 1+\frac{1}{2^{n-1}}$

Betrachte nur $\frac{1}{2^{n-1}}$, da 1 = konstant und somit in der Ungleichung subtrahiert werden kann.

$\frac{a_{3k+1}}{a_{3k+1+3}} = \frac{2^{3k+3}}{2^{3k}} = 2^3 > 1 \Rightarrow$ mon. fallend.

Hieraus ergibt sich $\max\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 4$

Da $\nexists\, n$ s.d. $\frac{1}{2^{n-1}} = 0$: $1 \notin \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\lim\inf_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow \nexists \min\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$3\frac{5}{4}$