Pier Malika RENZ

Jannis Andrija SCHNITZER

SVEN GRÜTZMACHER M114

Punkte:

Eins	Zwei	Drei	Vier	Fünf	Sigma
1	4	~~0,5~~ 1,5	1,5	4	11

Prof. Dr. Mark Podolskij | Analysis I | Wintersemester 2011/12

Blatt 4

Zentralübungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und die Menge der irrationalen Zahlen nicht abzählbar sind.

2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle n. Zeigen Sie ohne Verwendung von Satz 5.11 aus der Vorlesung: Aus $a_n \to a$ folgt $a_n^2 \to a^2$ und $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

3. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \sqrt{n+t} - \sqrt{n}$ für $t > 0$,

b) $b_n = \prod_{m=1}^{2012} \left(iz + \frac{m}{n}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$,

Hausaufgaben

1. **a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ abzählbar ist.

b) Beweisen Sie Satz 4.25 (ii) aus der Vorlesung.

c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

2. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

a) $\frac{1+3i}{1-2i}$,

b) $(1+i)^{43}$.

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene.

c) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1\right\}$

Bitte wenden!

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$

3. Erraten Sie den Grenzwert a der Folge

$$a_n := \frac{2n^2 + 7n + 3}{5n^2 + 6}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und geben Sie (mit Beweis) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad \text{für alle } n \geq n_0(\varepsilon),$$

an.

4. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{4^n+1}{5^n}$,

b) $b_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$,

$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{2n}$

c) $c_n = \frac{n+1}{(n+2)^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+2}$.

d) $d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $d_1 = d \geq 0$.

5.* Zeigen Sie: Die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 16.11. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

1.(a) Zz.: $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ ist abzählbar.:

Beweis: $\mathbb{N}$ ist abzählbar: $\Leftrightarrow$ $\exists$ ~~[illegible]~~ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} = \{f_1, f_2, ...\}$ ~~$\mathbb{N}$~~

↳ bijektiv!

$\Rightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\} = \{-1, f_1, f_2, f_3, ...\}$

zu kurz und ungenau

Setze $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $1 \mapsto -1$; $n \mapsto f_{n-1}$ für $n > 1$.

nicht wirklich etwas gezeigt

−1 Somit ist $\mathbb{N} \cup \{-1\} = \{g_1, g_2, g_3, ...\}$ □ ist g bije?

(b) Zz.: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar (mit A_n abzählbar)

Aus A_k abzählbar für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt:
~~[illegible]~~ $f^k: \mathbb{N} \to A_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$
ist bijektiv.

Nach Vorlesung 4.25 (i): $\exists\, h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv.

Zz.: $\exists\, g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ bijektiv.

Definiere $g: (i, j) \mapsto f^i(j)$.

g ist genau dann bijektiv, wenn alle A_k disjunkt sind,

d. h. ~~[illegible]~~ ~~Elemente~~ $A_k \cap A_{k'} = \emptyset$

für alle $k \neq k'$. Denn dann ist jedes $f^i(j)$ eindeutig.

~~Ansonsten ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gleich $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ ~~[illegible]~~ mit~~

~~$B_k := A_k \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}} A_n$~~

~~$R := \{n \mid n \in A_1$ und~~

−1

richtige Idee, aber unverständlich und ungenau ausgeführt

Ansonsten ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gleich der Vereinigung aller disjunkten A_n, die bis auf Duplikate die gleichen Elemente haben wie die originalen A_n.

(c) ~~[illegible]~~ $M := \{T \subset \mathbb{N} \mid T$ ist endlich$\}$

Zz.: M ist abzählbar

Definiere ~~[illegible]~~ $T_k := \{T \subset \mathbb{N} \mid \#T = k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller k-Elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion: T_k ist abzählbar.

IA: $k = 1$: $T_1 = \{\{1\}, \{2\}, ...\}$ ist offensichtlich abzählbar.

IS: $k \to k+1$

T_k ist abzählbar.

$T_{k+1} = \{ T \cap T^1 \mid T \in T_k, T^1 \in T_1, T^1 \notin T \}$

$T_{k+1} = \emptyset$
da $T^1 \not\subset T$

Da T_k abzählbar (nach IV):

$\exists f: \mathbb{N} \to T_k$ bijektiv. ✓

Da T_1 abzählbar:

$\exists g: \mathbb{N} \to T_1$ bijektiv ✓ (der Vollst. halber: $n \mapsto \{n\}$)

$\forall T_i \in T_k$ definiere $T_i^1 := \{ T^1 \in T_1 \mid T^1 \notin T_i \}$

verwechselt
$T_3 \in T_4$?

$= T_1 \setminus \{\{k\} \mid k \in T_i\}$ ← Die Menge ~~der~~ aller Mengen aller $k \in T_i$

T_i ist per definitionem endlich.

Da T_1 abzählbar, gibt es $\forall T_i$ eine Umordnung g^* von

g (s.o.), sodass
$g^*(1) = \{t_{i,1} \in T_i\}$
$g^*(2) = \{t_{i,2} \in T_i\}$
$\vdots$
$g^*(j) = \{t_{i,j} \in T_i\}$; $j = \# T_i \in \mathbb{N}$
$g^*(j+1) = \{t_{1,1} \notin T_i\}$
$\vdots$
$g^*(j+l) = \{t_{1,l} \notin T_i\}$

I tried and I went down....
schon am anfang fehler
-1

$g^*: \mathbb{N} \to T_1$, bijektiv, da nur die Reihenfolge der Elemente vertauscht wurde.

Somit gibt es $\forall T_i$ ein $g_i^+: \mathbb{N} \to T_1 \setminus \{\{k\} \mid k \in T_i\}$

mit $g_i^+: n \mapsto g^*(j+n)$ mit $j = \# T_i$; dieses ist bij.

$\Rightarrow T_1 \setminus \{\{k\} \mid k \in T_i\} = T_i^1 \notin T_i$

Somit: $T_{k+1} =$ ~~$\{T_i \cap T_i^1 \mid T_i \in T_k, T_i^1 \in T_1$~~

$\{ T \cap T^1 \mid \forall T \in T_k, \forall T^1 \in T_1 \setminus \{\{x\} \mid x \in T\} \}$

(Sorry, ich musste ein paar Indizes herumschieben.)

Da T_k und $T_1 \setminus \{\{x\} \mid x \in T\}$ beide abzählbar (letzteres $\forall T \in T_k$):

$\exists h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to T_{k+1}: (i,j) \mapsto f(i) \cap g_j^+(j)$ (s.o.)

Dies ist bijektiv, da $f(k)$ und $g_r^{-1}(k)$ bijektiv sind und ausserdem sichergestellt wurde, dass $f(i)$ und $g_r^{-1}(j)$ disjunkt sind.

$\Rightarrow$ Da es eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, ist T_{k+1} abzählbar. $\square$ induktion

$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ (T_n nach obiger Def.)

1/4

Gezeigt: alle T_k sind abzählbar.

Aus (b): $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar $\Rightarrow$ M ist abzählbar. $\square$

2a) $\frac{1+3i}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} + \frac{3i}{1-2i}$

$\cancel{1 + \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} - \frac{2i}{1-2i} \Leftrightarrow \frac{1}{1-2i} = 1 - \frac{2i}{1-2i}}$

$\frac{1+3i}{1-2i} = \frac{(1+3i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1}{5}\cdot(1+3i)\cdot(1+2i)$

$= \frac{1}{5}\cdot(1+2i+3i-6)$

$= \frac{1}{5}\cdot(-5+5i) = \underline{-1+i}$ ✓

b) $(1+i)^{43} = \left((1+i)^2\right)^{21}\cdot(1+i)$

$\overset{!}{=} \left((2i)\right)^{21}\cdot(1+i)$

$= \left((2i)^2\right)^{10}\cdot 2i\cdot(1+i)$

$= (-4)^{10}\cdot 2i\cdot(1+i)$

$1048576 \cdot 2i \cdot (1+i)$

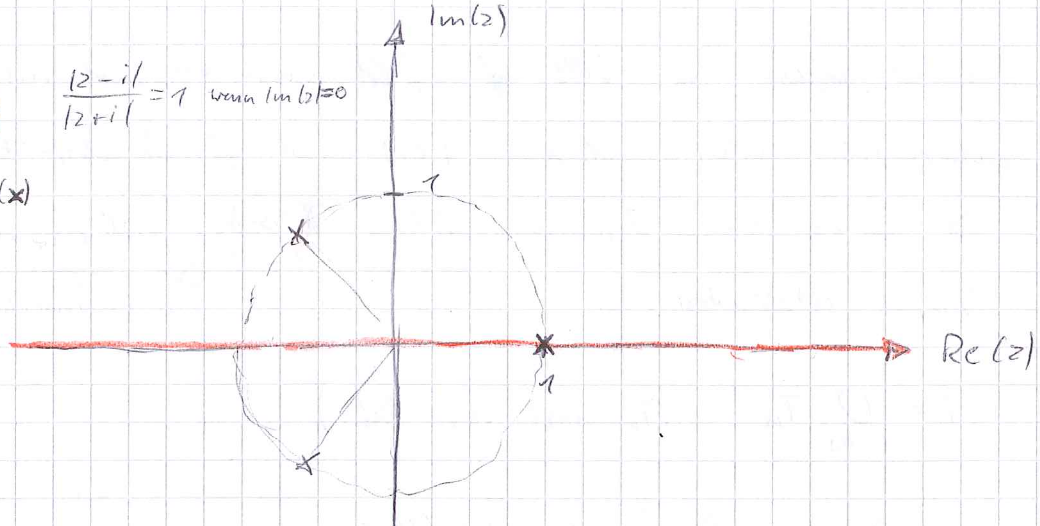
$= 2097152\; i\cdot(1+i)$

$= 2097152\cdot(i-1)$ ✓

bestimmt ...

c) $\frac{|z-i|}{|z+i|}=1$ wenn $\mathrm{Im}(z)=0$

d) (x)



(c) $\Leftrightarrow |z-i| = |z+i|$

$$\sqrt{\mathrm{Re}(z-i)^2+\mathrm{Im}(z-i)^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z+i)^2+\mathrm{Im}(z+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z-i)^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)-1)^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+(\mathrm{Im}(z)+1)^2}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Im}(z)-1)^2 = (\mathrm{Im}(z)+1)^2$$

$$\Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z)-1| = |\mathrm{Im}(z)+1|$$

Fallunterscheidung: $\mathrm{Im}(z) < 0$:

$$|\mathrm{Im}(z)|+1 = |\mathrm{Im}(z)|-1 \quad \text{f.A.}$$

$\mathrm{Im}(z) > 0$:

$$|\mathrm{Im}(z)|-1 = |\mathrm{Im}(z)|+1 \quad \text{f.A.}$$

$\mathrm{Im}(z) = 0$:

$$1=1 \text{ w.A.} \Rightarrow \mathrm{Im}(z)=0.$$

(d)

$$z^3=1$$

$$\Rightarrow (x+iy)^3 = 1$$

$$\Rightarrow x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3=1$$

$$\Rightarrow x=1,\ y=0 \text{ oder } x^3-3xy^2 = iy^3-3ix^2y+1$$

$$= i(y^3-3x^2y)+1$$

$$\Leftrightarrow y^3-3x^2y=0 \text{ und } x^3-3xy^2=1$$

$\Leftrightarrow \mathbb{L} = \{ (1,0), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}) \}$

✓ 4/4

3. Rate $a = \frac{2}{5}$. ✓

Zz: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$.

$$\left| \frac{2n^2+7n+3}{5n^2+6} - \frac{2}{5} \right| < \varepsilon$$

Elementare Umformungen $\Leftrightarrow$ $n_0(\varepsilon) > \frac{1}{10\varepsilon} \cdot \left(7 + \sqrt{-120\varepsilon^2 + 12\varepsilon + 49}\right)$ 0,5/4

Rechenweg! war verlangt! ... nicht gezeigt

4. a) $a_n = \frac{4^n+1}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{1}{5^n}$

Konvergenz von $\left(\frac{4}{5}\right)^n$: $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

($\Rightarrow$ mon. fallend. Schon trivial, da $\frac{4}{5} < 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$, da $\frac{4}{5} > 0$ und $n > 0$. $\Rightarrow$ Konvergenz.

$\frac{1}{5^{n+1}} < \frac{1}{5^n}$ und $\frac{1}{5^n} > 0 \Rightarrow$ Konvergenz.

$\Rightarrow a_n$ ist konvergent.

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$, denn $\left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$ und $\forall \frac{4}{5} > \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ mit $\left(\frac{4}{5}\right)^{n_0} < \varepsilon$.

$\left(n_0 = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{4}{5}}\right)$.

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5^n}\right) = 0$, denn $\frac{1}{5^n} > 0$ und $\forall \frac{1}{5} > \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ mit $\frac{1}{5^{n_0}} < \varepsilon$.

$n_0 = -\frac{\ln(n_0)}{\ln(5)}$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ln?? geht auch ohne! ✓

b) $b_n = n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

$= \sqrt{n^2+n} - n$

$-\frac{1}{2}$

Rate $b = \frac{1}{2}$ Zz: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ s.d. $\left| n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \right| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$n_0 = \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon - 1}$

Kein Beweis!

-1

c) $c_n = \frac{n+1}{n^2+4n+4} + (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n^2+2}$

$(-1)^n$ divergiert. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2}$ nach VL 5.13 $= 1$;

$\frac{n+1}{n^2+4n+4}$ laut VL 5.13 $\xrightarrow{n\to\infty} 0$; daher ist c_n divergent.

sehr kurz, aber OK

d) $d_{n+1} = \sqrt{2+d_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$d_1 = d$

Rate $\lim_{n\to\infty} d_n = 2$

Zz $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : |d_n - 2| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$

~~IA: n=1:~~

– 1

1,5/4

5. Annahme: $\exists f: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijektiv.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists! \; T = f(n) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$
damit $\subset \mathbb{N}$

Für jedes T gibt es eine Folge $a_T: \mathbb{N} \to \{0,1\}$.

$a_T(n): \; n \longmapsto \begin{cases} 0, \text{ wenn } n \notin T \\ 1, \text{ wenn } n \in T \end{cases}$

Damit ist T durch $a_T(n)$ beschrieben. $\Rightarrow \mathbb{N} \to \{a_T \mid T \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ bijektiv.

Nun können alle a_T untereinander gedacht werden:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8		…
a_{T_1}	0	1	0	1	1	0	~~1~~	1	1	1	…
a_{T_2}	1	0	0	0	0	0	0	0	0		…
a_{T_3}	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	…
a_{T_4}	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	…
⋮	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	…

All diese a_T sind verschieden, da bijektiv.
Nun kann man aus der Diagonalen wieder eine Folge machen (eingekreist). Invertiert man diese nun, setzt also 0, wo sie 1 wird, und 1, wo sie 0 wird, dann erhält man eine

Folge, die von allen a_{T_n} verschieden ist (das erste Element ist vom ersten von a_{T_1} verschieden, das zweite " " zweiten von a_{T_2} verschieden, ..., das n-te Element ist vom n-ten Element von a_{T_n} verschieden. Somit haben wir hier eine weitere Folge, die eine weitere Teilmenge von $\mathbb{N}$ (also ein El. von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) charakterisiert, das von allen vorigen verschieden ist. Das heisst aber, dass $\mathbb{N} \to \{a_{T_n} \mid T_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ und damit $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht bijektiv sind, sonst gäbe es zu jedem T ein n, und die „neue" Teilmenge müsste ~~schon~~ durch ein vorhandenes ~~an~~ a_{T_n} charakterisiert werden ↯ was sie wie gezeigt nicht wird. $\square$

~~(Frei nach Cantor u. Johanna Ziegel)~~

Lob

4/4