Malika RENZ, Jannis Andrija SCHNITZER

Tutor: Sven ; Mittwoch 14

Prof. Dr. Mark Podolskij   Analysis I   Wintersemester 2011/12

Blatt 2

Zentralübungsaufgaben

1. Es sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, wobei $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass K mit den von den reelen Zahlen induzierten Operationen ein Körper ist.

b) Es seien $P := \{a + b\sqrt{2} \mid a + b\sqrt{2} > 0\}$ und $P' := \{a + b\sqrt{2} \mid a - b\sqrt{2} > 0\}$. Zeigen, Sie dass P und P' Positivbereiche von K sind.

c) Zeigen Sie, dass $P \neq P'$.

2. Es sei K ein angeordneter Körper. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{|x+y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \quad \text{für } x, y \in K.$$

3. **a)** Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Jedes positive $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sei eine obere Schranke von A. Zeigen Sie, dass $\sup A \leq 0$.

b) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Setze $A + B := \{a + b \mid A \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie, dass das Supremum von $A + B$ existiert, und es gilt $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Hausaufgaben

1. Konstruieren Sie einen Körper mit zwei Elementen. Erklären Sie dazu explizit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf der Menge $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass dieser Körper nicht angeordnet ist.

2. **a)** Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x, y \in \mathbb{R}$:

i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ für $x > 0, y > 0$,

Bitte wenden!

ii) $2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2 + y^2$.

b) Entscheiden Sie, ob Supremum, Infimum, Maximum, Minimum der Menge $M := \{2^{-m} + n^{-1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ existieren und berechnen Sie diese Größen gegebenenfalls.

3. **a)** Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie: Aus $A \subset B$ folgt, dass $\sup A \leq \sup B$.

b) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Es gelte $\inf A > 0$ und wir definieren $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Beweisen Sie: Die Menge A^{-1} ist nach oben beschränkt, und es gilt $\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}$.

4. **a)** *Behauptung:* In jedem Sack Erbsen gibt es nur gelbe oder nur nichtgelbe Erbsen.

Beweis mit vollständiger Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}$ *der Erbsen im Sack:* Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Nehmen wir im Induktionsschritt aus einem Sack mit $n \geq 1$ Erbsen eine Erbse e heraus (ohne sie anzusehen), so sind die restlichen $n-1$ Erbsen nach der Induktionshypothese alle gelb oder alle nichtgelb. Um diesen Farbton festzustellen, entnehmen wir dem Sack eine weitere Erbse g und legen die Erbse e wieder in den Sack. Der Sack enthält also wieder $n-1$ nach der Induktionshypothese ausschließlich gelbe oder nichtgelbe Erbsen. Also ist e genau dann gelb, wenn auch g gelb ist. Der Induktionsbeweis ist beendet. $\square$

Wo liegt der Fehler?

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 2.11. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

Analysis Übungszettel 2   Mi 12⁰⁰ Uhr Gruppe

... Rentz
... Andrija
... SCHNITZER

1	2	3	4	Σ
2	1,5	2,5	2	8

1.

$K := (\{0,1\}, +, \cdot)$, es gebe 2 Abbildungen

K gleich als Ring/Körper definiert?

$+ : \begin{cases} K \times K \to K \\ 0+0 \mapsto 0 \\ 0+1 \mapsto 1 \\ 1+0 \mapsto 1 \\ 1+1 \mapsto 0 \end{cases}$ $\cdot : \begin{cases} K \times K \to K \\ 0 \cdot 0 \mapsto 0 \\ 0 \cdot 1 \mapsto 0 \\ 1 \cdot 0 \mapsto 0 \\ 1 \cdot 1 \mapsto 1 \end{cases}$

assoziativ?
Distributiv?
viel zu kurz so
... -2

- K nicht angeordnet: Gegenbsp.

Sei $P \subset K$ und (Annahme:) $1+1 \in P$

$1 \in P$, aber $1+1 = 0 \notin P$ ↯ im Widerspruch zur Annahme ✓

2/4

2a) $x, y \in \mathbb{R}$

i)

z.z. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ hier ankommen $x>0, y>0$

$\Leftrightarrow$? $\Rightarrow$? $\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$ $| \cdot xy > 0$

$x^2+y^2 \geq 2xy$ $| -2xy$

$x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$-\frac{1}{2}$

$(x-y)^2 \geq 0$ □ (nach Rechenregeln 3.4 (iv)) ✓

hier anfangen

ii)

z.z. $2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2+y^2$

(I) Es gilt: $2xy \leq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow$? da $0 \leq x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2$ folgt aus den anderen beiden

z.z. $2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2$ $| \cdot 2$

$\Rightarrow$? $4xy \leq (x+y)^2$ $-\frac{1}{2}$

$4xy \leq x^2+2xy+y^2$ $| -2xy$

$2xy \leq x^2+y^2$ gilt, siehe (I)

2.2 $\frac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2+y^2 \quad | \cdot 2$

$\Rightarrow^{?} \quad (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow^{?} \quad x^2+2xy+y^2 \leq (x^2+y^2)+(x^2+y^2) \quad | -(x^2+y^2)$ ≠0

grad so Folgefehler $2xy \leq x^2+y^2$

gilt, siehe I $\square$

hier enden

wieder: hier anfangen

b)

$M := \{2^{-m}+n^{-1} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$[1,0) \quad [1,0)$

sup $M = 1{,}5$

max $M = 1{,}5$

inf $M = 0$

$\nexists$ min M

Begründung? −1,5

1,5/4

3. a) Sein $A, B \in \mathbb{R}$, $a, b \neq \emptyset$
Seien A,B nach oben beschränkt.

Behauptung: $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$

$A \subset B \Leftrightarrow a \in B \; \forall a \in A$.

nicht 2-mal b benutzen!

$\forall b \in B : b \leq \sup B \Rightarrow \forall b \in A : b \leq \sup B$
$\Rightarrow \sup(B)$ ist eine obere Schranke von A.

Melissa Renz
Jannis Andrija SCHWITZER

Da $\sup(A)$ die kleinste obere Schranke ist, muss $\sup(B) \geq \sup(A)$ $\square$

Super!

b) Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$; A nach unten beschränkt.
Sei $\inf(A) > 0$.
Sei $A^{-1} := \{ a^{-1} \mid a \in A \}$. (Anmerkung: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ für $a \in \mathbb{R}$)

Behauptung: A^{-1} ist nach oben beschränkt; $\sup(A^{-1}) = (\inf(A))^{-1}$

$a \geq \inf(A) > 0 \quad \forall a \in A$

Anwendung von VL 3.4 (x): $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ik angeordneter Körper

Beweis: $x \leq y$
$\Leftrightarrow$
$1 = x \cdot \frac{1}{x} \leq y \cdot \frac{1}{x}$ (durch Äquivalenzumf. $\cdot \frac{1}{x}$)
$\Leftrightarrow$ (Möglich wg. $0 < x$ und 3.4(v))
$1 \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \leq y \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$ (durch Äquivalenzumf. $\cdot \frac{1}{y}$ wg. $0 < y$)
$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq y \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ $\square$

cool, aber das wäre schon klar

Somit gilt $0 < \inf(A) \leq a \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf(A)} \quad \forall a \in A$

$\Leftrightarrow a^{-1} \leq (\inf(A))^{-1} \quad \forall a \in A$

$\Leftrightarrow a^{-1} \leq (\inf(A))^{-1} \quad \forall a^{-1} \in A^{-1}$, da $\exists a^{-1} \forall a \in A$

Damit ist $(\inf(A))^{-1}$ eine obere Schranke von A^{-1}

Beweis kleinste obere Schranke (Supremum):

Zz: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a^{-1} \in A^{-1} : a^{-1} > \gamma - \varepsilon$ mit $\gamma = (\inf(A))^{-1}$

$\frac{1}{a} + \varepsilon \overset{!}{>} \frac{1}{\inf(A)}$ $f\left(\frac{1}{\inf(A)}\right) := 0$; *

$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf(A)} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{\inf(A)} - f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{\inf(A)} - \frac{1}{a}\right)$

wieso?

Somit:

* $f : A^{-1} \cup \left\{0, \frac{1}{\inf(A)}\right\} \to \mathbb{R}$

Verwirrend... was hast du?

$f\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \quad \forall \frac{1}{a} < \frac{1}{\inf(A)}$

$\Rightarrow \overbrace{\frac{1}{a}}^{a^{-1}} = \overbrace{\frac{1}{\inf(A)}}^{\gamma} - \overbrace{f\left(\frac{1}{a}\right)}^{\varepsilon} < \frac{1}{\inf(A)} \quad \forall \frac{1}{a} < \frac{1}{\inf(A)}$

$\Rightarrow \varepsilon = f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\square$ das wird nicht bel. klein?

− 1,5

2,5 / 4

4a) Sei $A(n)$ = Alle Erbsen in einem Sack mit n Erbsen sind entweder gelb oder nichtgelb.

Im Induktionsschritt ist zu zeigen:

$A(n-1) \Rightarrow A(n)$; in Worten:

Sind alle Erbsen in einem Sack mit ~~n-1~~ Erbsen ~~gelb~~ entweder gelb oder nichtgelb, so sind auch alle Erbsen in einem Sack mit n Erbsen entweder gelb oder nichtgelb.

Indem ich g (bzw. e) herausnehme, und annehme, alle im Sack verbliebenen Erbsen im Sack hätten dieselbe Farbe wie g (bzw. e), zeige ich: aus $A(n)$ folgt $A(n-1)$ für und nur für genau denselben Sack Erbsen in beiden Aussagen. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Zu zeigen ist aber die Gegenrichtung.

-2 F

Behauptung:

b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

IA: Für $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1$; $2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ $\square$

IS: Zz $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{IV}{=} \left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1}$$
$$= \left(2^{n+1} + 2^{n+1}\right) - 1$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{2} 2^{n+1}\right) - 1$$
$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1 \quad \square$$

2/4