



Für Sven von Malika u. Janis  
(11/14)

Prof. Dr. Mark Podolskij

Analysis I

Wintersemester 2011/12

## Blatt 10

Handwritten red numbers: 1/2/3/4/5 over 3/5 4 0 4 12/5

### Zentralübungsaufgaben

1. Geben Sie für die folgenden Funktionen maximale Definitionsbereiche an und berechnen Sie die Ableitungen, wo sie existieren.

a)  $f(x) := x \exp(3x)$

b)  $f(x) := \frac{x}{1+\exp(-x)}$

c)  $f(x) := \log(2x) \exp(3x)$

d)  $f(x) := \log(\log(3x))$

2. a) Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die  $n$ -te Ableitung eines Produktes:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

b) Berechnen Sie  $(x^2 e^x)^{(2012)}$ .

c) Es sei  $\varepsilon > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $a$  differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

3. Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ . Bestimmen Sie das Polynom  $p$  vom Grad 3 mit  $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ .

### Hausaufgaben

1. Geben Sie für die folgenden Funktionen maximale Definitionsbereiche an und berechnen Sie die Ableitungen, wo sie existieren.

**Bitte wenden!**



1. ~~1.1~~ S sei immer die Definitionsmenge.

a) S kann von Nenner eingeschränkt werden  $\Rightarrow$  Nullstellen des Nenners

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \leftarrow \text{keine Lsg in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \quad \text{wenn } f(x) := \frac{u(x)}{v(x)} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$u'(x) = -2x + 1, \quad v'(x) = 2x - 1 \quad (\text{Polynomregel})$$

$$\Rightarrow f' = \frac{(-2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(-x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 - x + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - x^2 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{-4x + 2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$$

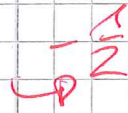


b) S kann durch den Term unter der Wurzel eingeschränkt werden.  
Es muss gelten:

$$1+x^2 \geq 0. \quad \text{Da dies für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt, ist } S = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(Produktregel) (Potenzregel)



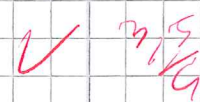
c) Siehe b), Term unter abstrakter Wurzel:  $x \geq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+x^2}}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+x^2}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right)$$

(zweimal Kettenregel)

$$(f(x) = \sqrt{x} \circ (1 + \sqrt{x}) \circ (1 + \sqrt{x})) \quad \text{in } x=0 \rightarrow \text{diffbar!}$$

d)  $S = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 \exp(-x^2) + x^3 \cdot (-2x) \cdot \exp(-x^2)$   
 $= 3x^2 \exp(-x^2) - 2x^4 \exp(-x^2)$   
 (Produktregel, Kettenregel für  $\exp, \exp' = \exp$ )



2 a) Differenzierbarkeit des Produktes folgt aus mehrfacher Anwendung von Satz 10.6 (ii)  
 Induktion über n

$$\text{IA: } n=1 \Rightarrow f_1 = \prod_{j=1}^1 f_j = f_1 \Rightarrow f_1' = f_1' \stackrel{1}{=} \sum_{k=1}^1 f_k' \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^1 f_j$$

$$= \sum_{k=1}^1 f_k' \cdot 1 = f_1' \quad \checkmark$$

Annahme:  $f_1' = \sum_{k=1}^n \left( f_k' \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j \right)$  gilt für n  $(f_1 = \prod_{j=1}^n f_j)$

$$\Rightarrow \left( \prod_{j=1}^{n+1} f_j \right)' = \left( \left( \prod_{j=1}^n f_j \right) \cdot f_{n+1} \right)' = f_{n+1}' \cdot f_1 + f_1' \cdot f_{n+1}$$

$$= f_{n+1}' \cdot \prod_{j=1}^n f_j + \sum_{k=1}^n f_k' \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j = \sum_{k=1}^{n+1} f_k' \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} f_j \quad \square$$

28)

 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}}$ 

$$\frac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$$

 $\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow a}$ 

$$\frac{x f(a) + a f(a) - a f(a) - a f(x)}{x - a}$$

Selber Kover  
als  
 $\frac{a}{a}$  ✓

$$= -a \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a}$$

$$= -a \cdot f'(a) + 1 \cdot f(a) \quad \square \quad \checkmark$$

3. Aus  $f(g(x)) = x$  folgt  $f = g^{-1}$

Ang.:  $f'$  diffbar  $\Rightarrow$  Nach Satz 10.10 ist  $f'$ , wenn es ex., von der Form

was ist es?  
 $f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{g'(f(y))}$

Kannst du  
nicht  
anwenden!  
 $g'(0) \neq 0!$

Aus  $f'(0) = f'(g(0)) = 0 \Rightarrow g'(f(0)) = 0$

$\Rightarrow$  der allg. Ausdruck für  $f'$  ist für 0 nicht def.

$\Rightarrow f$  ist nicht diffbar an der Stelle 0  $\square$

4. Definiere  $h(x) := f(x) - g(x)$

Es gilt:  $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0 \Rightarrow h$  wächst streng monoton

und  $h(x_0) = 0$ , (da  $f(x_0) = g(x_0)$ )

Zz:  $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$   
 $\Leftrightarrow h(x) < 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \quad (*)$

sowie  $f(x) > g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$   
 $\Leftrightarrow h(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, b) \quad (**)$

Richtigkeit von  $(*)$  und  $(**)$  folgt aus der Monotonie von  $h$

(denn für  $x > x_0$  muss  $h(x) > h(x_0) = 0$

und für  $x < x_0$  muss  $h(x) < h(x_0) = 0$  sein)  $\square$

Alg: Mehr Formalismus!!!!