Für Sven von Malika u. Jannis

(Mi 14)

Prof. Dr. Mark Podolskij | Analysis I | Wintersemester 2011/12

Blatt 10

1	2	3	4	
3,5	4	0	4	11,5

Zentralübungsaufgaben

1. Geben Sie für die folgenden Funktionen maximale Definitionsbereiche an und berechnen Sie die Ableitungen, wo sie existieren.

a) $f(x) := x\exp(3x)$

b) $f(x) := \frac{x}{1+\exp(-x)}$

c) $f(x) := \log(2x)\exp(3x)$

d) $f(x) := \log(\log(3x))$

2. a) Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die n-te Ableitung eines Produktes:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

b) Berechnen Sie $(x^2 e^x)^{(2012)}$.

c) Es sei $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ sei in a differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$. Bestimmen Sie das Polynom p vom Grad 3 mit $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

Hausaufgaben

1. Geben Sie für die folgenden Funktionen maximale Definitionsbereiche an und berechnen Sie die Ableitungen, wo sie existieren.

Bitte wenden!

$x^2 - x + 1 = 0 \leadsto \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

$u' = -2x + 1 \quad v' = 2x - 1 \quad \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ Sla

a) $f(x) := \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$ $D = \mathbb{R}$

b) $f(x) := x\sqrt{1+x^2}$ $1 + x^2 < 0 \leadsto x^2 < -1 \leadsto D = \mathbb{R}$ $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $D = \mathbb{R}_0^+$

d) $f(x) := x^3 \exp(-x^2)$ $D = \mathbb{R}$; $\frac{d}{dx} x^3 e^{-x^2} = 3x^2 e^{-x^2} + x^3(-2x)e^{-x^2}$

2. **a)** Zeigen Sie: Sind die Funktionen f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, in einem Punkt x differenzierbar, so ist auch ihr Produkt $f = \prod_{j=1}^n f_j$ in x differenzierbar und es gilt

$$f' = \Big(\prod_{j=1}^n f_j\Big)' = \sum_{k=1}^n \Big(f_k' \prod_{j=1, j \neq k}^n f_j\Big).$$

b) Es sei $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ sei in a differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to a, x \neq a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x - a} = f(a) - a f'(a).$$

3. Es sei $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine stetige, in 0 differenzierbare Funktion mit $g(0) = g'(0) = 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(g(x)) = x$ für alle $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass f im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

4. Die Funktionen f und g seien differenzierbar in (a, b) und es gelte $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Für ein $x_0 \in (a, b)$ sei $f(x_0) = g(x_0)$. Beweisen Sie, dass

$$f(x) < g(x) \text{ für alle } x \in (a, x_0)$$ $h = f - g$

und

$$f(x) > g(x) \text{ für alle } x \in (x_0, b).$$ $\leadsto h' > 0$

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 11.1. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

⋆ ⋆ ⋆

Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest
und alles Gute für das neue Jahr!

⋆ ⋆ ⋆

1 2 3 4

1. Aufgabe $\quad S$ sei immer die Definitionsmenge.

a) S kann vom Nenner eingeschränkt werden $\Rightarrow$ Nullstellen des Nenners

$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$ ← keine Lsg in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow S = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) u(x)}{v^2(x)}$ wenn $f(x) := \frac{u(x)}{v(x)}$ (Quotientenregel)

$u'(x) = -2x+1, \quad v'(x) = 2x - 1$ (Polynomregel)

$\leadsto f' = \frac{(-2x+1)\cdot(+x^2 - x + 1) - (2x-1)(-x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}$

$= \frac{-2x^3 + 2x^2 - 2x + x^2 - x + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x - x^2 + x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$

$= \frac{-4x+2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$ ✓

b) S kann durch den Term unter der Wurzel eingeschränkt werden. Es muss gelten:

$1 + x^2 \geq 0$. Da dies für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $S = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ $-\frac{1}{2}$

(Produkt-Regel) (Kettenregel)

c) Siehe (b), Term unter äußerster Wurzel: $x \geq 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ -1

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$ (zweimal Kettenregel)

$(f(x) = \sqrt{x} \circ (1 + \sqrt{x}) \circ (1 + \sqrt{x}))$ in $x=0$ ↯ diff'bar!

d) $S = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 \exp(-x^2) + x^3 \cdot (-2x) \cdot \exp(-x^2)$

$= 3x^2 \exp(-x^2) - 2x^4 \exp(-x^2)$ ✓ 7,5/9

(Produktregel, Kettenregel für exp, $\exp' = \exp$)

2 a) Differenzierbarkeit des Produktes folgt aus mehrfacher Anwendung von Satz 10.6 (iii)

Induktion über n

IA: $n=1 \rightarrow f(x) = \prod_{j=1}^{1} f_j = f_1 \Rightarrow f' = f_1' \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{1} f_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{1} f_j$

$= \sum_{k=1}^{1} f_k' \cdot 1 = f_1'$ ✓

Annahme: $f_{(*)}' = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_j\right)$ gilt für n $\quad \left(f_{(*)} = \prod_{j=1}^{n} f_j\right)$

$\leadsto \left(\prod_{j=1}^{n+1} f_j\right)' = \left(\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right) \cdot f_{n+1}\right)' = f_{n+1}' f_{(*)} + f_{(*)}' \cdot f_{n+1}$

$= f_{n+1}' \cdot \prod_{j=1}^{n} f_j + \sum_{k=1}^{n} f_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} f_j = \sum_{k=1}^{n+1} f_k' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} f_j$ $\square$ ✓

2(b) $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \lim_{\dots} \frac{x f(a) + a f(a) - a f(a) - a f(x)}{x-a}$

Sehr Kurz aber... 4/4 ✓

$= -a \lim_{\dots} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \lim_{\dots} \frac{x-a}{x-a}$

$= -a \cdot f'(a) + 1 \cdot f(a)$ ☐ ✓

3. Aus $f(g(x)) = x$ folgt $f = g^{-1}$

Ang.: f' diff'n $\Rightarrow$ nach Satz 10.10 ist f', wenn es ex., von der Form

¿ was ist y_0?

$f'(y_0) = (g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y_0))} = \frac{1}{g'(f(y_0))}$

Aus $f(0) = f(g(0)) = 0 \Rightarrow g'(f(0)) = 0$ −4

kannst du nicht anwenden! $g(0) \neq = 0$!

$\Rightarrow$ der obige Ausdruck für f' ist für 0 nicht def.

$\Rightarrow$ f ist nicht diffbar an der Stelle 0 ☐

4. Definiere $h(x) := f(x) - g(x)$

Es gilt: $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \Rightarrow h$ wächst streng monoton

und $h(x_0) = 0$, (da $f(x_0) = g(x_0)$)

Zz: $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

$\Leftrightarrow h(x) < 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \quad (*)$

sowie $f(x) > g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\Leftrightarrow h(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, b) \quad (**)$

Richtigkeit von $(*)$ und $(**)$ folgt aus der Monotonie von h

(denn für $x > x_0$ muss $h(x) > h(x_0) = 0$

und für $x < x_0$ muss $h(x) < h(x_0) = 0$ sein) ☐

4/4

4

Allg: Mehr Formalismus!!!!!