— Malika Renz, Jannis Andrija Schnitzer | Tutor: Sven Grützmacher (Mi, 14–16)

Prof. Dr. Mark Podolskij | Analysis I | Wintersemester 2011/12

1	2	3	4	5	Σ
4	3	4	2,0	2,5	15,5

Blatt 1

Zentralübungsaufgaben

1. Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für alle $A, B \subset M$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A \cup B) = \{f(x) \mid f(x) \in (A \cup B)\}$

$f(A) = \{f(x) \mid f(x) \in A\}$

b) Für alle $A, B \subset M$ gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

$f(B) = \{f(x) \mid f(x) \in B\}$

c) Im allgemeinen gilt nicht $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

$f(A) \cup f(B) = \{f(x) \mid f(x) \in A \vee f(x) \in B\}$
$= f(A \cup B)$

2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x + y;$

b) $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (a, b) \mapsto 2^a 3^b;$ injektiv, weil Primfaktorzerlegung eindeutig

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + ax$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Bei dieser Teilaufgabe darf mit einer Skizze argumentiert werden.

3. Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall A, B \subset M : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

b) f ist bijektiv genau dann, wenn $\forall A \subset M : \ f(M \backslash A) = N \backslash f(A)$.

Hausaufgaben

1. **a)** Es sei $A := \{1, 2, \{5, 7\}, \{2\}, 1\}$. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A explizit an.

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{5,7\}\}, \{\{2\}\}, \{1,2\}, \{1,\{5,7\}\}, \{1,\{2\}\}, \{2,\{5,7\}\}, \{2,\{2\}\}, \{\{5,7\},\{2\}\}, \{1,2,\{5,7\}\}, \{1,2,\{2\}\}, \{1,\{5,7\},\{2\}\}, \{2,\{5,7\},\{2\}\}, A\}$

b) Es seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bitte wenden!

c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage für vier Mengen A, B, C, D: $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap D) \times (B \cap C)$.

2. Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Es sei weiterhin $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen von Y. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt, $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$.

3. Es seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Abbildungen. Zeigen Sie:

und h nutzlos

a) Wenn f und g injektiv sind, so ist $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist $g \circ f$ surjektiv.

c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f injektiv.

4. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung.

a) $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k \mapsto \begin{cases} 2k, & \text{falls } k > 0, \\ 1 - 2k, & \text{falls } k \leq 0. \end{cases}$

5.* Es seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to A$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass wenn die Abbildungen $h \circ g \circ f$ und $g \circ f \circ h$ beide surjektiv und die Abbildung $f \circ h \circ g$ injektiv is, dann sind die Abbildungen f, g und h alle bijektiv.

Bonusaufgaben: Bonusaufgaben sind (meistens schwierigere) Hausaufgaben mit denen Sie extra Punkte sammeln können. Sie sind mit einem Stern (z.B. **5.***) gekennzeichnet.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 26.10. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.

Analysis - Übungszettel 1 Tutor: Sven Grützmacher

1a)

$A := \{1, 2, \{5,7\}, \{2\}, 1\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{5,7\}\}, \{\{2\}\}, \{1,2\}, \{1,\{5,7\}\}, \{1,\{\{2\}\}\},$
$\{2,\{5,7\}\}, \{2,\{2\}\}, \{\{5,7\},\{2\}\}, \{1,2,\{5,7\}\},$
$\{1,2,\{2\}\}, \{2,\{5,7\},\{2\}\}, \{1,2,\{5,7\},\{2\}\}\}$
$\{1,\{5,7\},\{2\}\}$ ✓

b)
Für $A \cap (B \cup C) \overset{!}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C)$ zu zeigen, dass
1. $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und
2. $A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ und $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C) \Rightarrow (x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C)$
$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ✓

Was, wenn $A \cap (B \cup C) = \emptyset$? $- \mathcal{E}$ $x \in$

2. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ oder $x \in (A \cap C)$
$\Rightarrow (x \in A$ und $x \in B)$ oder $(x \in A$ und $x \in C) \Rightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C)$
$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$ ✓

◻

c) Annahme: $(A \times B) \cap (C \times D) \overset{!}{=} (A \cap D) \times (B \cap C)$
Beweis durch Gegenbeispiel mit $A = \{1,2,3\}$; $B = \{4,5,6\}$
$C = \{6,7,8,1\}$; $D = \{2,4,9\}$

$A \times B = \{(1,4); (1,5); (1,6); (2,4); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6)\}$
$C \times D = \{(6,2); (6,4); (6,9); (7,2); (7,4); (7,9); (8,2); (8,4); (8,9); (1,2);$
$(1,4); (1,9)\}$

$(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1,4)\}$

$(A \cap D) \times (B \cap C) = \{(2,6)\} \neq \{(1,4)\} = (A \times B) \cap (C \times D)$ ↯

Im Widerspruch zur Annahme, Aussage widerlegt. Gut!! ✓

4/4

2a)

B_n ist das "normale" B
$\mathcal{B}$ ist das $\mathcal{B}$ (großes Beta?)
glaube ja

Es gilt $\forall B_n \in \mathcal{B} : B_n \subset Y$

ok, aber das sieht ein bisschen so aus, als sei n endlich

$(B_1 \subset B_2) \Leftrightarrow (\forall x \in B_1 \Rightarrow x \in B_2)$

und

$\forall x \in B_1, B_2 : x \in Y$ Wenn also $B_1 \subset B_2$, dann $y \in B_1 \Rightarrow y \in B_2$

du vermischst Variablen!

$y \in B_1 \Rightarrow y \in B_2$

was ist x jetzt? $x \in X$? $x \in Y$? $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) \in B_1 \Rightarrow f(x) \in B_2$

$\Rightarrow ((x \in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow f(x) \in B_1) \Rightarrow (f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_2)))$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ formal naja und ... verwirrend $\square$ $-\frac{1}{2}$

2b)

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{B_n \in \mathcal{B}} B_n\Big) = \bigcup_{B_n \in \mathcal{B}} f^{-1}(B_n)$$

$\forall x \in X : (x \in f^{-1}(\bigcup_{B_n \in \mathcal{B}} B_n) \Leftrightarrow (f(x) \in \bigcup_{B_n \in \mathcal{B}} B_n))$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \vee \dots \vee f(x) \in B_n$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \vee \dots \vee x \in f^{-1}(B_n)$

$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \dots \cup f^{-1}(B_n))$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{B_n \in \mathcal{B}} f^{-1}(B_n)$ $\square$

2 Richtungen zeigen!

Rückrichtung diesmal nicht notwendig, da alle $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$ Ja schon, aber ab sofort bitte beide Richtungen getrennt!

noch $\frac{3}{4}$

3a)

$f: A \to B$, $g: B \to C$; h ist egal; $g \circ f : A \to C; x \mapsto g(f(x))$

f injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (1)

g injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ (2)

Wenn (1) und (2) zutreffen, dann

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ $\Leftrightarrow$ Injektivität für $g \circ f$ $\square$

$\Rightarrow g \circ f$ inj

✓

Ana - Übungszettel 1   Tutor: Sven Gritzmacher

Nr. 3 b)

$f: A \to B$; $g: B \to C$; $g \circ f: A \to C$; $x \mapsto g(f(x))$

f und g surjektiv, d.h.

$f(A) = B$

$g(B) = C$

z.z. $g \circ f$ surjektiv:

$(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C$ ✓

c) Was ist denn a_1, a_2?

$g \circ f$ injektiv : $\Rightarrow ($ $a_1 \neq a_2 \Rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ $)$

$\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

g ist Funktion

$\Rightarrow$ f inj ✓ noch 4/4

Nr. 4

a)

$f_1: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

~~1. Fall: $0 \in \mathbb{N}$~~

- Injektivität: $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow f(x_1,y_1) \neq f(x_2,y_2)$

Gegenbeispiel: $(1,1) \neq (2,2)$ $\Rightarrow$ $f(1,1) = 1^2 - 1^2 = 0 = 2^2 - 2^2 = f(2,2)$ $\}$

Im Widerspruch zur Annahme! $\Rightarrow f_1$ nicht injektiv. ✓

~~2. Fall: $0 \notin \mathbb{N}$~~

~~b)~~

- Surjektivität:

? ($1 \in \mathbb{Z}$), wäre f_1 also surjektiv müsste $f_1(x,y) = 1$ existieren gelten

~~Gegenbsp.~~: $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \overset{!}{=} \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $\exists x,y \in \mathbb{N}:$ $x^2 - y^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{Z}$

daher $z = 1$

$(\Rightarrow ?)$ $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow -y^2 = 1 - x^2$

$-y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow \underbrace{(1+x)}_{>0,\text{ da } x\in\mathbb{N}}\underbrace{(1-x)}_{\geq 0,\text{ da } x\in\mathbb{N}}$? $-\frac{1}{2}$

$-y^2<0$, da $y\in\mathbb{N}$ ≤ 0 !

Im Widerspruch zur Annahme $\Rightarrow f_1$ nicht surjektiv Gegenbsp reicht!

- Bijektivität: Da f_1 ~~weder injektiv noch surj~~ nicht injektiv, nicht surjektiv ist, ist die Abb. auch nicht bijektiv ✓

Nr. 4 b)

$f_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x \mapsto ax+b$ mit $a,b\in\mathbb{R}$

- Injektivität: $f_2(x_1)=f_2(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Aus $ax_1+b = ax_2+b \Rightarrow ax_1 = ax_2$

1. Fall $a=0$

$0\cdot x_1 = 0 = 0\cdot x_2$ $\forall x_1, x_2$ Insbesondere auch für $x_1\neq x_2$

Bsp.: $0\cdot 5 = 0 = 0\cdot 3$, $x_1=5\neq 3=x_2$

$\Rightarrow f_2$ ist nicht injektiv für $a=0$ ✓

2. Fall $a\neq 0$

$f(x_1)=f(x_2)$

$\Leftrightarrow ax_1 = ax_2$ $|:a$ wieso geht das?! aber stimmt

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f_2$ ist injektiv für alle $a\neq 0$ ✓

- Surjektivität:

1. Fall $a=0$:

$f_2(x) = 0\cdot x + b = b \Rightarrow W_f = \{b\}\neq\mathbb{R}$ ✓

(Beweis: Zz. $\{b\}\neq\mathbb{R} \Leftarrow \mathbb{R}\not\subseteq\{b\}$ ist zz.
Bew.: ($x_1\in\mathbb{R} \Rightarrow x_1\in\{b\} \Leftrightarrow x_1=b$
$x_1\neq x_2\in\mathbb{R} \Rightarrow x_2\in\{b\} \Leftrightarrow x_2=b$)
$\Rightarrow x_1=b=x_2$ für $x_1\neq x_2$ ↯
im Widerspruch zur Annahme ☐) nicht nötig

2. Fall $a\neq 0$

$f_2(x)=ax+b$ $-\frac{1}{2}$ Nein

$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$
} Nach Zwischenwertsatz (in Plenarübung validiert, dürfen wir nutzen) ist $W_f=\mathbb{R} \Rightarrow f_2$ surjektiv für $a\neq 0$ ✓

Analysis - Übungszettel 1 Tutor: Sven Grützmacher

Nr. 4 b)

- Bijektivität:

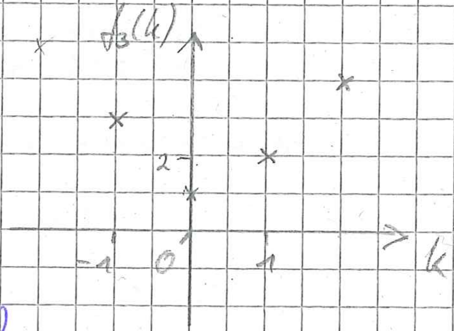
f_2 injektiv und surjektiv für $a \neq 0 \Rightarrow f_2$ bijektiv für $a \neq 0$

f_2 nicht injektiv, surjektiv, bijektiv für $a = 0$ Umkehr-abb.? $-\frac{1}{2}$

Nr. 4c)

$f_3: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$k \mapsto \begin{cases} 2k & \text{für } k > 0 \\ 1-2k & \text{für } k \leq 0 \end{cases}$



- Injektivität: $k_1 \neq k_2 \Rightarrow f_3(k_1) \neq f_3(k_2)$

Fall 1 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$

$k_1 \neq k_2$

$\Leftrightarrow 2k_1 \neq 2k_2 \Leftrightarrow f_3(k_1) \neq f_3(k_2)$ ✓

Fall 2 $k_1 \leq 0$, $k_2 \leq 0$

~~$-2k_1 + 1 \neq$~~ $k_1 \neq k_2 \Leftrightarrow$

$-2k_1 + \cancel{1} \neq -2k_2 + \cancel{1} \Leftrightarrow f_3(k_1) \neq f_3(k_2)$ ✓

Fall 3 $k_1 \leq 0$, $k_2 > 0$

~~$f_3(k_2) = 2k_2$~~ für $k_1 \neq k_2$ aber $f_3(k_1) = f_3(k_2)$ müsste gelten:

$f_3(k_2) = 2k_2 = 1 - 2k_1 = f_3(k_1)$

$\Rightarrow 2k_2 + 2k_1 = 1$

$\Rightarrow 2\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} = 1$ (*) $\Rightarrow \overbrace{k_1 + k_2}^{\in \mathbb{Z}} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ...

Da aber $\mathbb{Z}$ ein Körper, müsste $k_1 + k_2 = k_3 \in \mathbb{Z}$

$-\frac{1}{2}$ $\mathbb{Z}$ ist kein Körper

Da aber $\nexists k_3 \in \mathbb{Z} : 2 \cdot k_3 = 1$, steht (*) im Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow f_3$ injektiv, da Fall 3 irrelevant!

Surjektivität von f_3:

Wenn f_3 surjektiv, dann $\exists k \in \mathbb{Z}$ mit $f_3(k) = z \ \forall z \in \mathbb{Z}$.

// Ich hab die Zeile fünfmal geschrieben und jedesmal war ein Schreibfehler drin!

Sei ~~z~~ ~~da~~ bspw. $z=0$

$\Rightarrow 2k = 0$ für $k > 0$ oder $1-2k=0$ für $k \leq 0$

$2k = 0 \Leftrightarrow k=0$; $k=0 \wedge k>0$ ist falsch

$\underbrace{1-2k=0}_{\text{somit f. A.}} \Leftrightarrow 2k=-1$; $\nexists k \in \mathbb{Z}: 2k=-1$ f

Es existiert kein k, für das $f(k)=0$ $\lightning$
im Widerspruch zur Annahme, f_3 wär surjektiv.

f_3 ist somit nicht surjektiv; f_3 ist injektiv; f_3 ist nicht bijektiv

2,0/4

5*. Seien A, B, C Mengen, $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to A$ Abbildungen.

Zz.: Wenn (1) $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ surjektiv
$\Leftrightarrow h(g(f(A))) = A$; $g(f(h(C))) = C$
und (2) $f \circ h \circ g$ injektiv
$\Leftrightarrow (b_1 \neq b_2 \Rightarrow f(h(g(b_1))) \neq f(h(g(b_2)))$,

dann soll gelten: f ist bijektiv, g ist bijektiv, h ist bijektiv

Beweis: 1. Surjektivität von f, g, h:

Nach (1): $x \in A \Leftrightarrow x \in h(g(f(A)))$

$(h(g(f(A))) = A) \Rightarrow g(f(A)) = C$, da

Nein, $g \circ f$ surj?

$-\frac{1}{2}$

$h: C \to A$ und somit für $h(M) = A$
gelten muss $M = C$

Weitere Folgerung: h ist surj., da $h(M) = A$
für $M = g(f(A)) = C$ f

$-\frac{1}{2}$

$g(f(A)) = C \Rightarrow f(A) = B$, da $g: B \to C$

Nein

$-\frac{1}{2}$

Weitere Folgerung: g ist surj., da $g(M) = C$
für $M = f(A) = B$

$f(A) = B \Rightarrow f$ ~~ist~~ surjektiv. f

2. Injektivität von f, g, h

Nach (2): $(b_1 \neq b_2 \Rightarrow f(h(g(b_1))) \neq f(h(g(b_2))) \overset{f \text{ Funktion}}{\Rightarrow} h(g(b_1)) \neq h(g(b_2))$

$\overset{h \text{ Funktion}}{\Rightarrow} g(b_1) \neq g(b_2)$) $\Leftrightarrow g$ ist injektiv!

$(g(b_1) \neq g(b_2)) \overset{g \text{ Fn.}}{\Rightarrow} b_1 \neq b_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(h(g(b_1))) \neq f(h(g(b_2))))$
$\Leftrightarrow (g(b_1) \neq g(b_2)) \Rightarrow f(h(g(b_1))) \neq f(h(g(b_2)))$

$c_1 := g(b_1)$; $c_2 := g(b_2)$ $\quad c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(h(c_1)) \neq f(h(c_2)) \overset{f \text{ Fn.}}{\Rightarrow} h(c_1) \neq h(c_2)$

somit ist h injektiv!

FORTSETZUNG SIEHE RÜCKS. AUFGABENBLATT!

Fortsetzung Aufgabe 5*:

$a_1 := h(c_1)$; $a_2 := h(c_2)$

$a_1 \neq a_2 \overset{h\text{ Fu.}}{\Rightarrow} c_1 \neq c_2 \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} f(a_1) \neq f(a_2)$

somit ist auch f injektiv.

Da nun Surjektivität und Injektivität für f, g, h nachgewiesen wurden, folgt: f, g, h sind bijektiv. $\square$

noch

2,5/4