Melissa Runz

Lukas Ahlenbrüngers

Lineare Algebra - Übungsblatt 11

Nr. 1

$a \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ a^2-a & 1 & 4 & a^2+1 \end{array}\right) & \begin{array}{cc} x_1 & I \\ x_2 & II \\ x_3 & III \end{array}\end{array}$$

$$\overset{\text{Lös}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2(a^2-a) & 0 & -5 & 4-2(a^2+1) \end{array}\right) \quad I - 2\,III \quad ; \text{ mit } -\bar{5} = \bar{0} \text{ in } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$\text{Lös} = \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2a^2+2a & 2-2a^2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{array}\end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2a^2+2a & 2-2a^2 \end{array}\right)$$

- für $a = \bar{0}$: $\quad -2a^2+2a = 2-2a^2$

$$-2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 2 - 0$$

$$0 \neq 2 \quad \Rightarrow \text{Widerspruch im LGS} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

- für $a = \bar{1}$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$4x_2 = 2 - 4x_1 \Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{2} - x_1$$

$$3x_3 = 4 - 2\left(\tfrac{1}{2} - x_1\right) = 4 - (1 - 2x_1) = 3 + 2x_1 \Rightarrow x_3 = 1 + \tfrac{2}{3} x_1$$

Sei L Lösungsmenge $\quad L := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

- genau eine Lösung für $a \neq 0, a \neq 1$, bleiben noch
  - $a_1 = \bar{2}$, $a_2 = \bar{3}$, $a_3 = \bar{4}$.

III Auflösen nach x_1 liefert ~~$x_1 = \frac{1+a}{a}$~~ $\quad x_1(-2a^2+2a) = 2 - 2a^2$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2-2a^2}{-2a^2+2a} = \frac{1+a}{a} \quad \text{da } a \neq 0$$

- $a_1 = \bar{2}$: $\quad x_1 = \frac{3}{2}$
- $a_2 = \bar{3}$: $\quad x_1 = \frac{4}{3}$
- $a_3 = \bar{4}$: $\quad x_1 = \frac{5}{4}$

Problem: Streng genommen gibt es keine Brüche in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, daher

(i) genau eine Lösung:

wenn $x_1 = a^{-1}$ gibt es je genau eine Lösung

$4a^{-1} + 4x_2 = 2$

$4x_2 = 2 - 4a^{-1} \quad | \cdot 4^{-1} \quad (4^{-1} \hat{=} 4)$

$x_2 = 3 - a^{-1}$

$1 - 2a^{-1} + 3x_3 = 4 \quad | -1$

$-2a^{-1} + 3x_3 = 3 \quad | +2a^{-1}$

$3x_3 = 3 + 2a^{-1} \quad | \cdot 3^{-1} \quad (\hat{=} 2)$

$x_3 = 1 + 4a^{-1}$

$\Rightarrow \quad L: \{(a^{-1}, 3 - a^{-1}, 1 + 4a^{-1})\}$ für $a \neq 0, 1$ da

$0 \hat{=}$ keine Lösung, $1 \hat{=} \infty$ Lösungen

(ii) für $a = 1$ $\exists$ unendlich viele Lösungen

I $\quad 2x_2 + 3x_3 = 4$

II $\quad 4x_1 + 4x_2 = 2$

III $\quad (a^2 - a)x_1 + x_2 + 4x_3 = a^2 + 1 \overset{a=1}{\Leftrightarrow} \cancel{x_2} + 4x_3 = 2 - x_2 \quad | \cdot 4^{-1} (\hat{=} 4)$

$x_3 = 3 - 4x_2 \;\; \cancel{=t},$ sei $t := x_2$

in II: $x_1 = 3 - x_2$

$\Rightarrow L = \{(3 - t, t, 3 - 4t) \mid t \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ mit $\# L = 5$

Nr. 3

$$\left.\begin{array}{l} f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 \\ g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \end{array}\right\} \in \mathbb{Q}[x]$$

$f = a_1 \cdot g + c_1$ $\qquad$ $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = a_1 (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2) + c_1$

$\Rightarrow a_1 = 1, \quad c_1 = x^3 - 2x$

$g = a_2 \cdot c_1 + c_2$ $\qquad$ $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = a_2 (x^3 - 2x) + c_2$

$a_2 = x, \quad c_2 = x^3 + x^2 - 2x - 2$

$c_1 = a_3 \cdot c_2 + c_3$ $\qquad$ $x^3 - 2x = a_3 (x^3 + x^2 - 2x - 2) + c_3$

$a_3 = 1, \quad c_3 = -x^2 + 2$

$c_2 = a_4 \cdot c_3 + c_4$ $\qquad$ $(x^3 + x^2 - 2x - 2) = a_4 (-x^2 + 2) + c_4$

$a_4 = -x, \quad c_4 = +x^2 - 2$

$c_3 = a_5 \cdot c_4 + c_5$ $\qquad$ $+x^2 + 2 = a_5 (-x^2 - 2) + c_5$

$a_5 = \mp 1, \quad c_5 = 0$

mit $c_5 = 0$ fertig,

ggT ist $c_4 = (-x^2 - 2)$. $\Rightarrow$ $\cancel{d = -x^2 - 2}$ $d :=$ ggT$(f, g) = -x^2 - 2$

Darstellung als Linearkombination:

$d = p \cdot f + q \cdot g$ $\qquad$ mit $p, q \in \mathbb{Q}[x]$

$x -$