Analysis I

Yichuan Shen

20. Januar 2012

Kapitel 12

Potenzreihen

Definition und Satz 12.1. Sei $x_0 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,\ a_n \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Die Zahl

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe. ($\frac{1}{0} := \infty$) Es gilt:

(i) Für $R = 0$ konvergiert die Reihe nur für $x = x_0$.

(ii) Für $0 < R < \infty$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rl} \text{Die Reihe konvergiert} & \forall x : |x - x_0| < R \\ \text{Die Reihe divergiert} & \forall x : |x - x_0| > R \end{array}$$

Das Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ heißt *Konvergenzintervall*.

(iii) $R = \infty \implies$ die Reihe konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iv) Ist $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf $[a, b]$.

Beweis. Wurzelkriterium 7.11 anwenden:

(i) ist trivial.

(ii) Es gilt:

$$\alpha := \limsup_{n \in \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = \frac{|x - x_0|}{R}$$

Für $\alpha < 1$ konvergiert die Reihe absolut $\implies$ (ii) + (iii).

Für $\alpha > 1$ divergiert die Reihe $\implies$ (ii).

(iv) O.B.d.A. sei $|x_0 - a| < |x_0 - b| \implies \forall x \in [a, b] : |a_n (x - x_0)^n| \leq |a_n (b - x_0)^n|$. Da $|b - x_0| < R$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (b - x_0)^n| \text{ konvergiert.}$$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$ nach dem Weierstraß-Kriterium. $\square$

Beispiel 12.2.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \implies R = 1 \implies$ Reihe ist konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$. Für $x = \pm 1$ divergiert die Reihe.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

$$\implies R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$$

Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $x = 1$: die alternierende harmonische Reihe konvergiert. Für $x = -1$: die harmonische Reihe divergiert.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n \implies R = \frac{1}{2}$. Reihe konvergiert für $|x| < \frac{1}{2}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{2}$. Für $x = \pm\frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe.

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (7.12) $\implies R = \infty \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

(v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \log n} \implies R = 1$. Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Für $x = -1$ konvergiert die Reihe, für $x = 1$ divergiert die Reihe.

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}_{\longrightarrow 1} < \sqrt[n]{\frac{1}{n \log n}} < \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}_{\longrightarrow 1}$$

Satz 12.3. Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ im Punkt $x = r > 0$ konvergent $\implies$ diese Konvergenz ist gleichmäßig auf $[0, r]$.

Beweis. $\tilde{a_n}(x) = a_n r^n,\ \tilde{b_n}(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n}(x) \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } [0, r]$$

$\tilde{b_n}(x)$ ist monoton fallend für $x \in [0, r) \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n}(x)\tilde{b_n}(x)$ ist gleichmäßig konvergent auf $[0, r]$. □

Satz 12.4. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat die Funktion

$$f : (-R, R) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

folgende Eigenschaften:

(i) $f \in \mathcal{C}^1((-R, R))$ mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und diese Reihe hat Konvergenzradius R.

(ii) $f \in \mathcal{C}^\infty((-R, R))$

(iii) $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$

(iv) Ist die Reihe in $x = R$ (bzw. $x = -R$) konvergent und definiere

$$f(R) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad f(-R) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

$\implies f$ ist im Punkt $x = R$ linksstetig ($x = -R$ rechtsstetig).

Beweis.

(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, d.h. die beiden Reihen konvergieren gleichmäßig auf $[a,b] \subset (-R,R)$. Für

$$f_n(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

$$f_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}$$

gilt nach 11.7:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$$

(ii) Iteriere (i).

(iii) trivial.

(iv) Aus 12.3 folgt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist gleichmäßig konvergent auf $[0,R] \implies f$ ist stetig auf $[0,R]$. □

Satz 12.5. *(Identitätssatz)* $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_a, R_b > 0$ und es gebe ein $0 \le \delta < \min\{R_a, R_b\}$ mit $\forall |x| < \delta : f(x) = g(x)$.

$$\implies \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n$$

Beweis. Aus 12.4 folgt $f, g \in \mathcal{C}^\infty([-\delta,\delta])$ und aus 12.4 (iii) folgt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

□

Bemerkung 12.6. Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in I^\circ$ *in eine Potenzreihe entwickelbar* $:\iff$

$$\exists \text{ Potenzreihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \cap I : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Nach 12.4 und 12.5 existiert höchstens eine Entwicklung, $f \in \mathcal{C}^\infty((x_0 - R, x_0 + R) \cap I)$ und $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Satz 12.7. Seien $f : I \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^\infty(I),\ x_0 \in I^\circ$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

heißt *Taylor-Reihe* von f um x_0. Es gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0, f) = 0 \qquad (R_n \text{ aus } 10.22)$$

Beispiel.

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(0) = 0$, aber $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

Rechenregeln 12.8. $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien Potenzreihen mit Konvergenzradien $R_a, R_b > 0$. Folgende Funktionen für $|x| < R := \min\{R_a, R_b\}$ sind in eine Potenzreihe entwickelbar:

(1) $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$

(2) $(\alpha f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n$

(3) $(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n$

Beispiel.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad \text{für } |x| < 1$$