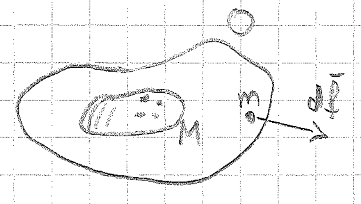
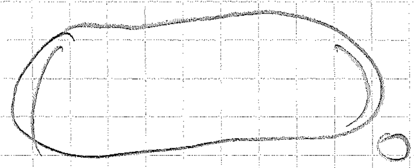
19.01.2012



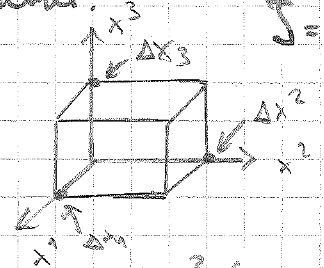
$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m}\int_O \bar{F}\,d\bar{f}$$

Allgemeiner:

$$J = \int_O d\bar{f}\cdot\bar{F}$$



Bsp.:



$$J = \underbrace{\int_{A_{oben}} dx^1 dx^2 F^3(x^1, x^2, \Delta x^3) + \int_{A_{unten}} dx^1 dx^2 (-F^3(x^1, x^2, 0))}_{J_1}$$

A_{oben}: Deckfläche; Δx^3: const.! s. Skizze

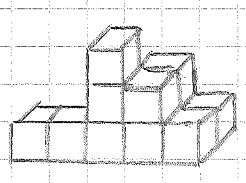
$$+ \underbrace{\text{vorn/hinten}}_{J_2} + \underbrace{\text{rechts/links}}_{J_3}$$

$$J_1 = \int_{A_{unten}} dx^1 dx^2 \Delta x^3 \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(x^1, x^2, 0) = \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 \frac{\partial F^3}{\partial x^3} + O(\Delta^4)$$

$$\Rightarrow J = \Delta V\cdot\left(\frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3}\right) \equiv \Delta V\cdot(\partial_i F_i) \equiv \Delta V\cdot(\bar{\nabla}\cdot\bar{F}) \equiv \Delta V\,(\underbrace{\mathrm{div}\,\bar{F}}_{\text{Divergenz}})$$

$\Delta V = \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$

Jetzt zum „großen Volumen":



Addiere alle entsprechenden Gleichungen:

$\Rightarrow$ In der Summe der J's heben sich „innere Flächen" weg

$\Rightarrow$ „totales" Oberflächenint.

$\Rightarrow$ Die Summe der $\Delta V(\partial_i F_i)$ gibt Vol.int. über „totales" Volumen V: $\boxed{\int_O d\bar{f}\cdot\bar{F} = \int_V d^3\bar{r}\,(\bar{\nabla}\cdot\bar{F})}$ Gaußscher Satz

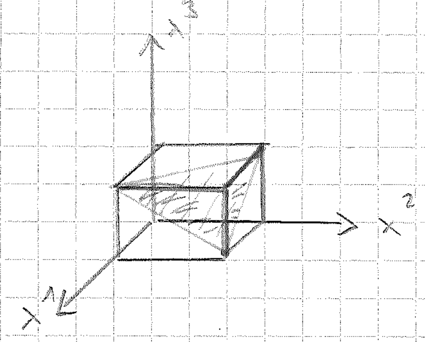
O: Oberfläche aller Würfel

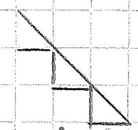
Erinnerung: $\boxed{\oint d\bar{s}\cdot\bar{F} = \int_A d\bar{f}\,(\bar{\nabla}\times\bar{F})}$ Stokes

Struktur: Stokes $\longrightarrow$ Gauß $\longrightarrow$

	Stokes	Gauß	
	1-dim. Rand	2-dim. Rand	...
HDI $\rightarrow$ (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung)	$\updownarrow$	$\updownarrow$	analog
	2-dim. Inhalt	3-dim. Inhalt	...

„Loch" im obigen Beweis: Wir wollen (wie schon bei Stokes) Oberfläche „glätten".

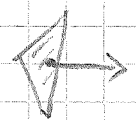




Wir haben:

$\bar{A}_\Delta = \sum_{i=1}^{3} \bar{A}_{\Delta,i}$

(elementare Geometrie)



Darstellung einer Fläche
mit Hilfe des Normalenvektors
(Kreuzprodukt)

Wir wollen unserem eckigen Volumen die Ecken abschneiden können ohne einen Fehler von mehr als Δ^3 zu haben.

M11

zurück zur Gravit.; einfachster Fall:

Massenpkt. bei $\vec{0}$.

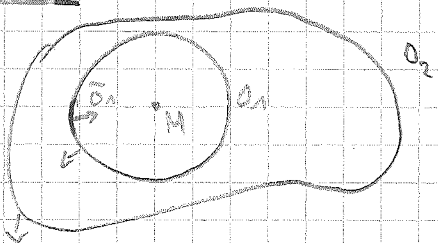
Oberfläche: Sphäre mit Radius R

$J = \int_O \bar{F}\cdot d\bar{f} = \int_O \left(-\frac{G_N mM}{R^2}\bar{e}_r\right)\left(|d\bar{f}|\bar{e}_r\right) = -\frac{G_N mM}{R^2}\int_O |d\bar{f}|$

$= 4\pi G_N mM$ ✓

Betrag von Flächenelement

Alg. Fläche:



$J_{1,2} = \int_{O_1, O_2} \bar{F} d\bar{f}$

$J_2 - J_1 = \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} - \int_{O_1} \bar{F} d\bar{f}$

$= \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} + \int_{\bar{O}_1} \bar{F} d\bar{f}$ ← umgekehrte Orientierung

$\ldots = \int_{O_2 \cup \bar{O}_1} \bar{F} d\bar{f}$

Oberfläche des Volumens des „Zwischenraums" von O_1 & O_2

nach Gauß: $J_2 - J_1 = \int_{V_2 - V_1} d^3r\, \bar{\nabla}\bar{F}$

⇒ Unser „Theorem" folgt für allg. M umgebende Flächen, falls $\bar{\nabla}\bar{F} = 0$.

19.01.2012 $-\vec{\nabla}\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{\nabla} V) = \underbrace{\vec{\nabla}^2 V}$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} V = \left(\frac{\partial^2 V}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 V}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 V}{(\partial x^3)^2}\right)$$

$$\equiv \Delta_x V(x) \equiv \Delta V$$

La-Place-Operator!

Wir konzentrieren uns auf $\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)$

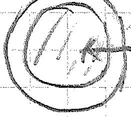
zunächst $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{r}\right) = \ldots = -\frac{x^i}{r^3}$; $-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x^i}{r^3}\right)$; $-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x^i}{r^3}\right) = \ldots$

$\ldots = -\left\{\frac{3}{r^3} - x^i\,\frac{3}{2}\,\frac{2x^i}{r^5}\right\} = 0$ Bem.: $(x^i)^2 = r^2$ prüfungsrelevant!

Wir haben jetzt: Unser Theorem für bel. Flächen, die Pkt.masse bei $\vec{0}$ umgeben.

- Verallgemeinerung: · beliebig liegende Pkt.massen (Transl. inv.)
  - · Massenverteilungen → wegen Linearität □ (Kräfte addieren sich)

Anwendung:



Rotat.symm., nicht homogen
↪ nur Gesamtmasse zählt für Kraft

9.4 Feldgleichungen der Gravitation

$$\oint \vec{F}\, d\vec{f} = -(4\pi G_N m) M$$

$$\int_{Vol.} (\vec{\nabla}\vec{F})\, d^3 r = -(4\pi G_N m)\int_{Vol.} \rho\, d^3 r \xrightarrow[\text{da Vol. bel.}]{} \begin{array}{l} \vec{\nabla}\vec{F} = -4\pi G_N m\rho \\ \vec{\nabla}^2 V = 4\pi G_N m\rho \\ \equiv \Delta V = 4\pi G_N m\rho \end{array}$$

Def.: Gravitationspotential: $\Phi = \frac{1}{m} V$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\Phi \equiv \Delta\Phi = 4\pi G_N \rho}$$ partielle Diff.gln.

Laplace-Operator

Poissonsche (ohne ρ: Laplacesche) Diff.gln.

Testmasse: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\Phi}$