Analysis I

Yichuan Shen

18. Januar 2012

Satz 11.3. *(Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)* f_n konvergiert genau dann gleichmäßig auf S gegen f, wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S, \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Beweis.

„$\Longrightarrow$": Es gilt $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S :$$
$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

„$\Longleftarrow$": $\forall x \in S$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge $\Longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ punktweise auf S. Für $p \longrightarrow \infty$ erhält man:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Satz 11.4. *(Weierstraß-Kriterium)* Sei $f_n : S \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit $\forall x \in S : |f_n(x)| \leq \gamma_n$ und sei $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ konvergent

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ ist gleichmäßig konvergent.}$$

Beweis. Setze $S_n := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j$. S_n ist konvergent, also eine Cauchy-Folge.

$\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ für $g_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ gilt $\forall x \in S$:

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \ldots + \gamma_{n+p} = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ Nach 11.3 ist g_n gleichmäßig konvergent

$\Longrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ ist gleichmäßig konvergent □

Satz 11.5. Sei $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$, $f_n, f : S \to \mathbb{R}$. f_n konvergiere gleichmäßig gegen f. Ist $x_0 \in \mathcal{H}(S)$ und existiert $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to x_0} f_n(x)$, dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Beweis. $L_n := \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existiert.

(1) *Zu zeigen:* $L := \lim_{n\to\infty} L_n$ existiert. Es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in S : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $|L_{n+p} - L_n| < \varepsilon$ für $x \longrightarrow x_0$
$\Longrightarrow$ $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge
$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ existiert

(2) *Zu zeigen:* $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\exists \delta > 0, \forall x \in \dot{\mathcal{U}}_\delta(x_0) : |f_m(x) - L_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Longrightarrow \forall m \geq n_0 : |f(x) - L| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m| + |L_m - L| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L$ □

Satz 11.6. $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : S \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt x_0. Dann gilt:

(i) Konvergiert f_n gleichmäßig auf S gegen $f \implies f$ ist stetig in x_0

(ii) Ist $\varphi := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent $\implies \varphi$ ist stetig in x_0.

Beweis.

(i) Sei $x_0 \in \mathcal{H}(S)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i). □

Beispiel. $f_n : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x^n$. f_n konvergiert punktweise gegen

$$f : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn sonst wäre f stetig.

Satz 11.7. Sei I ein endliches Intervall, $f_n : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar. Es gebe ein $x_0 \in I$, so dass $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Ist dann die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf I, dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf I und es gilt für $f := \lim_{n\to\infty} f_n$:

$$f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Beispiel. $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \longrightarrow \exp(x)$. Auf $[a,b]$ ist die Konvergenz gleichmäßig. Es gilt $f_n' = f_{n-1}$.

$$\implies \exp'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \exp(x)$$

Beweis. I ist von der Form $[a,b]$, (a,b), usw... Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n'(x) - f_{n+p}'(x)| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \\ |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Wenden wir nun den Mittelwertsatz auf $f_n - f_{n+p}$ an, $\exists \eta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_{n+p}(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| \\ &\quad + |x - x_0| \cdot |f_n'(x_0 + \eta(x-x_0)) - f_{n+p}'(x_0 + \eta(x - x_0))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$\implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f := \lim_{n\to\infty} f_n$.

Zu zeigen: f ist differenzierbar mit $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Betrachte für ein festes $x_1 \in I$

$$h_n : I \setminus \{x_1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}$$

$$
\begin{aligned}
|h_n(x) - h_{n+p}(x)| &= \frac{1}{|x-x_1|}|f_n(x) - f_n(x_1) - f_{n+p}(x_1) + f_{n+p}(x)| \\
&= |f_n'(x_1 + \eta(x-x_1)) - f_{n+p}'(x_1 + \eta(x - x_1))| \quad \text{(Mittelwertsatz)}
\end{aligned}
$$

$\implies$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I \setminus \{x_1\} : |h_n(x) - h_{n+p}(x)| < \varepsilon$

$\implies$ $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $I \setminus \{x_1\}$ gegen $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$

$\implies$ Es gilt also:

$$
f'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \lim_{x\to x_1}\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_1} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x_1)
$$

□

Beispiel 11.8. $f_n(x) = \frac{1}{n}\exp(-xn^2)$, $I = [0,\infty)$ $\implies$ f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) = 0$. $f_n'(x) = -n\exp(-xn^2)$ ist divergent für $x = 0$.

$$
0 = f'(0) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(0)
$$

Satz 11.9. *(Kriterium von Abel)* Sei $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$, $a_n, b_n : S \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist gleichmäßig konvergent auf S

(ii) $\forall x \in S$ ist $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton

(iii) $\exists k \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S : |b_n(x)| \leq k$

Dann gilt:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } S.
$$

Beweis. Definiere $A(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x)$, $A_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_j(x)$, $\alpha_n = A - A_n$. Aus (i) folgt:

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in S : |\alpha_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4k}
$$

Sei $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j(x)b_j(x)\right| &= \left|\sum_{j=n+1}^{n+p} A_j(x)(b_j(x) - b_{j+1}(x)) - A_n(x)b_{n+1}(x) + A_{n+p}(x)b_{n+p+1}(x)\right| \\
&= \Bigg|\sum_{j=n+1}^{n+p} A(x)(b_j(x) - b_{j+1}(x)) - \sum_{j=n+1}^{n+p} \alpha_j(x)(b_j(x) - b_{j+1}(x)) \\
&\quad - A(x)(b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)) + \alpha_n(x)b_{n+1}(x) - \alpha_{n+p}(x)b_{n+p+1}(x)\Bigg| \\
&< \frac{3}{4k} \cdot \sum_{j=n+1}^{n+p} |b_j(x) - b_{j+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{4k} \cdot |b_{n+1}(x) - b_{n+p+1}(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\implies$ $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in S : \left|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j(x)b_j(x)\right| < \varepsilon$

$\implies$ $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(x)b_j(x)$ konvergiert gleichmäßig. □