

08.11.2012

• $\rho(\vec{r})$ vorgegeben Φ ?

Lösung: Coulomb-Gesetz

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

• $\rho(\vec{r}) = 0$, Potentiale fest an bestimmten Orten / Flächen in Raum
= RBs

$$\Delta\Phi = 0$$

Lösung: Variablentrennung!

• $\rho(\vec{r}) \neq 0$ vorgegeben, + RBs

Lösung: $\Delta\Phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

§ Variablentrennung (nicht immer)

2.3.3 Methode der Greenachen Funktion

$$\int_V dV \operatorname{div} \vec{A} = \int_S da \vec{A} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{A} = \Phi \nabla \Psi$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla(\Phi \nabla \Psi) = \nabla \Phi \nabla \Psi + \Phi \nabla^2 \Psi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = \Phi (\nabla \Psi \cdot \vec{n}) = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad \text{Projektion des Gradienten auf die Normale}$$

$$\int_V dV (\nabla \Phi \nabla \Psi + \Phi \nabla^2 \Psi) = \int_S da \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (\text{1. Greenache Identität})$$

zurück zu Abschnitt 2.14

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi \nabla^2 \Phi$$

$$= +\frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \Phi)^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int_S da \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

$$= 1 - \frac{\epsilon_0}{2} \int_S da \underbrace{\Phi}_{\sim \frac{q}{r}} \underbrace{(\nabla \Phi \cdot \vec{n})}_{\sim \frac{q \vec{r}}{r^3}} \quad < \frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{r^4} \cdot r \cdot 4\pi r^2 \sim \frac{1}{r}$$

Anwendung: $S \rightarrow \infty$ Eindeutigkeit der Lösungen von elektr. statischen

Problemen: Es gäbe zwei Lösungen Φ_1 & Φ_2

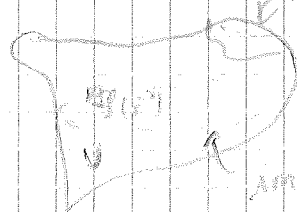
$\Rightarrow$ für $U = \Phi_1 - \Phi_2$ gilt $\Delta U = 0$ + RBs, $U = 0$ & $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ an den Rändern

andererseits aus der 1. GJ (Greenache Identität) für $\Phi = \Psi = U$ folgt

$$\int dV = \underbrace{(U \Delta U)}_{=0} + \underbrace{\nabla U \cdot \nabla U}_{=0} = \int da U \frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \int dV (\nabla U)^2 = 0 \Rightarrow \nabla U = 0 \Rightarrow U = 0 \parallel U = \text{const.} \quad \text{"oder"}$$

an jedem Punkt am Rand reicht die Kenntnis von ϕ oder $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ aus!



nur $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ bekannt

Tausche in der 1. GJ ϕ & ψ aus und ziehe die resultierende Gln. von der 1. GJ ab.

2. Greensche Identität:

$$\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_S da (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n})$$

Anwendung: Integralgln. für ϕ

setze $\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ & $\phi = \phi(\vec{r})$

$$\int_V dV' (\phi(\vec{r}') \nabla'^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla'^2 \phi(\vec{r}'))$$

$\underbrace{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')}_{\text{Teil der Poisson-Glm.}}$

$$= \int_V dV' (-4\pi \phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}')) + \frac{\phi(\vec{r})}{\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Oberflächenintegral über Rand

$$= \int_S da' [\phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} (\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'}]$$

nur an 3. Rand

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_S da' [\phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} (\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'}]$$

ebenfalls nur am Rand

Man definiere $G(\vec{r}, \vec{r}') = \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}')$$

Für $F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ ohne RBS $\Rightarrow$ nicht eindeutig
= "frei wählbar"

man setze in die 2. GJ $\phi = \phi$, $\psi = G(\vec{r}, \vec{r}')$ ein

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S da' [G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}]$$

(L...)

Anwendungen:

Dirichlet -RB: $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ auf $\vec{r}' \in S$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_S da' \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{r}, \vec{r}')$$

differentialer Ausdruck

08.11.2012 Neumann-RB: $\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ funktioniert nicht: keine Green'sche

$$\int_S da' \frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \int_V dv \operatorname{div}(\nabla' G_N(\vec{r}, \vec{r}')) = \int_V dV' - \frac{4\pi}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \neq 0$$

G erfüllt Laplace-Gln.

Man versuche: $\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{4\pi}{S}$
auf Oberfläche & Fläche von S

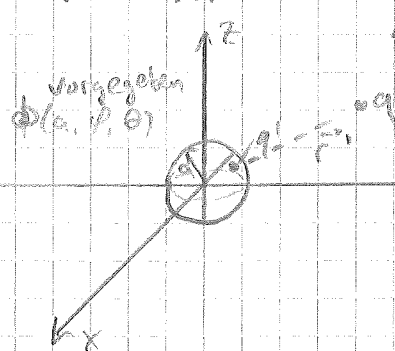
$$(\dots) = -\frac{1}{4\pi} \int_S da' \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S da' \phi(\vec{r}') = \langle \phi \rangle_S$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dv' \phi(\vec{r}') \nabla' G_N(\vec{r}, \vec{r}') + \langle \phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi} \int_S da' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'}$$

Problem gelöst!

Beispiel: Potential einer Kugel mit Radius a und vorgegebenen

$$\phi(r=a, \varphi, \theta)$$



$\phi(a, \varphi, \theta)$ Green'sfunktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in S$

$G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ = Potential aus der Aufgabe 2. Abschnitt 2.2.1

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{r |\vec{r} - \frac{a^2}{r^2} \vec{r}'|}$$

μ = Winkel zwischen $\vec{r}$ & $\vec{r}'$

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \mu)^{1/2}} - \frac{1}{(a^2 + \frac{r'^2 r^2}{a^2} - 2r' \cos \mu)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{\partial}{\partial r'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') \Big|_{\vec{r}' \rightarrow a} = -\frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos \mu)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \phi(a, \varphi', \theta') \frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos \mu)^{3/2}} \quad (\text{deterministischer Ausdruck}), \text{ keine Gln.}$$

Kugeloberfläche

Problem gelöst